

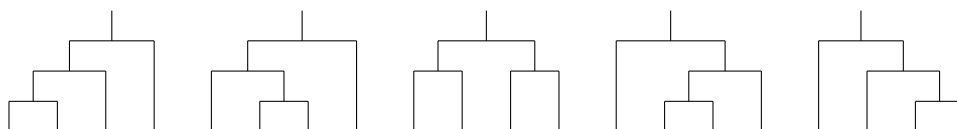
1 括弧のくくり方の数

数式 $x_1 \star x_2 \star x_3 \star \cdots \star x_n$ の演算の順番を表す括弧のくくり方は何通りあるか。

n	くくり方	後置記法	a_n
1	x_1	x_1	1
2	$(x_1 \star x_2)$	$x_1 x_2 \star$	1
3	$((x_1 \star x_2) \star x_3)$ $(x_1 \star (x_2 \star x_3))$	$x_1 x_2 \star x_3 \star$ $x_1 x_2 x_3 \star \star$	2
4	$((((x_1 \star x_2) \star x_3) \star x_4)$ $((x_1 \star (x_2 \star x_3)) \star x_4)$ $((x_1 \star x_2) \star (x_3 \star x_4))$ $(x_1 \star ((x_2 \star x_3) \star x_4))$ $(x_1 \star (x_2 \star (x_3 \star x_4)))$	$x_1 x_2 \star x_3 \star x_4 \star$ $x_1 x_2 x_3 \star \star x_4 \star$ $x_1 x_2 \star x_3 x_4 \star \star$ $x_1 x_2 x_3 \star x_4 \star \star$ $x_1 x_2 x_3 x_4 \star \star \star$	5

これは、 n チームで戦うトーナメントのパターンの数とも考えられる。

例 1 $n = 4$ の場合



問題 1

- $n \geq 2$ について、 a_n を $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}$ を用いて定める漸化式を求めなさい。
[ヒント] 左ブロックと右ブロックに分かれて予選を行い、最後に決勝戦を行う。
- 母関数 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + \cdots$ ($a_0 = 0$ とする) が満たす関数方程式を求めなさい。
- $f(0) = 0$ に注意して、 $f(x)$ を求めなさい。
[ヒント] $f(x)$ を y と書くとわかりやすい。
- a_n を階乗を用いて $\frac{!}{! !}$ の形で表しなさい。
[ヒント] 奇数の積 $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots$ は、偶数の積 $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots$ を掛けると階乗で表せるようになり、偶数の積は $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots$ で割ると階乗で表せるようになる。
- a_n を組合せの記号を用いて $\frac{C}{-}$ の形で表しなさい。
[ヒント] $\frac{(m+n)!}{m! n!} = {}_{m+n}C_m$
- この形を参考にして、 a_n を直接求める求め方を考えなさい。
[ヒント] 数式の後置記法は、 n 個の変数と $(n-1)$ 個の演算子を一行に並べた形をしている。