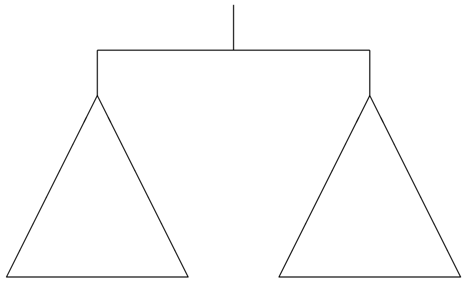
括弧のくくり方の数・解答

問題 1

(1) $n \geqq 2$ について，a_n を $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}$ を用いて定める漸化式を求めなさい。
左ブロックと右ブロックに分かれて予選を行い，最後に決勝戦を行うと考える。



上図のように分かれるパターンが，$a_k \times a_{n-k}$ 通りで，k が 1 から $n-1$ まであるから，

$$a_n = a_1\ a_{n-1} + a_2\ a_{n-2} + \cdots + a_{n-2}\ a_2 + a_{n-1}\ a_1$$

(2) 母関数 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + \cdots$ $(a_0 = 0$ とする$)$ が満たす関数方程式を求めなさい。

$$\begin{aligned}
f(x) &= 0 + 1x + a_1\ a_1x^2 + (a_1\ a_2 + a_2\ a_1)x^3 + (a_1\ a_3 + a_2\ a_2 + a_3\ a_1)x^4 + \cdots \\
&\qquad + (a_1\ a_{n-1} + a_2\ a_{n-2} + a_3\ a_{n-3} + \cdots + a_{n-1}\ a_1)x^n + \cdots \\
&= x + a_1x(a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots) \\
&\quad + a_2x^2(a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots) \\
&\quad + a_3x^3(a_1x + \cdots + a_{n-3}x^{n-3} + \cdots) \\
&\quad \vdots \\
&\quad + a_{n-1}x^{n-1}(a_1x + \cdots) \\
&\quad \vdots \\
&= x + (f(x))^2
\end{aligned}$$

(3) $f(0) = 0$ に注意して，$f(x)$ を求めなさい。
$y = f(x)$ とおくと

$$y = x + y^2$$
$$y^2 - y + x = 0$$
$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2}$$

$f(0) = 0$ だから

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2}$$

(4) a_n を階乗を用いて $\dfrac{\square!}{\square!\ \square!}$ の形で表しなさい。

$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1-4x)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}{}_{\frac{1}{2}}\mathrm{C}_n(-4x)^n$$

x^n の係数 a_n は

$$\begin{aligned}a_n&=-\frac{1}{2}\,\frac{\frac{1}{2}}{1}\,\frac{-\frac{1}{2}}{2}\,\frac{-\frac{3}{2}}{3}\cdots\cdots\frac{-\frac{2n-5}{2}}{n-1}\,\frac{-\frac{2n-3}{2}}{n}(-1)^n2^{2n}\\&=2^{n-1}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdot(2n-5)(2n-3)}{n!}\\&=2^{n-1}\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdots\cdot(2n-5)(2n-4)(2n-3)(2n-2)}{2\cdot4\cdot6\cdots\cdot(2n-4)(2n-2)\ n!}\\&=\frac{(2n-2)!}{(n-1)!\ n!}\end{aligned}$$

(5) a_n を組合せの記号を用いて $\dfrac{{}_{\square}\mathrm{C}_{\square}}{\square}$ の形で表しなさい。

$$a_n=\frac{{}_{2n-1}\mathrm{C}_n}{2n-1}=\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{2(2n-1)}=\frac{{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}}{n}=\frac{{}_{2n-2}\mathrm{C}_n}{n-1}$$

(6) この形を参考にして，a_n を直接求める求め方を考えなさい。

後置記法の式 $1\ 2\ 3-4--$ を計算していく過程を分析する。

文字	動作	メモリ	記憶している個数
1	1 を記憶する	1	1
2	2 を記憶する	$1,2$	2
3	3 を記憶する	$1,2,3$	3
$-$	$2-3$ を記憶する	$1,-1$	2
4	4 を記憶する	$1,-1,4$	3
$-$	$-1-4$ を記憶する	$1,-5$	2
$-$	$1-(-5)$ を記憶する	6	1

このように，値を読むとメモリに追加し，演算子を見るとメモリから 2 つ取り出して計算して結果をメモリに追加する。したがって，メモリに記憶している個数は，値を読むと 1 増加し，演算子を読むと 1 減少する。ただし，演算子を読んだときメモリに 2 個以上記憶されてないといけない。言い換えると，演算子を読むと 1 減少するけれども 0 になることはない。

そこで次のように考える。

(a) ○を n 個と△を $(n-1)$ 個一列に並べる。

(b) その列を左から読んでいって，○なら $+1$，△なら -1 する。

(c) 途中 0 にならずに最後まで読み終わったら，その列は○を変数，△を演算子で置き換えると後置記法の式になる。このような列を**良い列**と呼ぶことにする。

(d) 最初に並べた列の左から何文字かを順序を変えずに右端に動かして同様の操作をする。

(e) 全部で $(2n-1)$ 通りの列ができるが，ただ 1 つだけ**良い列**になる。

例 1

○	○	△	○	△	△	○	○	△									
1	2	1	2	1	0	1	2	1									
	○	△	○	△	△	○	○	△	○								
	1	0	1	0	−1	0	1	0	1								
		△	○	△	△	○	○	△	○	○							
		−1	0	−1	−2	−1	0	−1	0	1							
			○	△	△	○	○	△	○	○	△						
			1	0	−1	0	1	0	1	2	1						
				△	△	○	○	△	○	○	△	○					
				−1	−2	−1	0	−1	0	1	0	1					
					△	○	○	△	○	○	△	○	△				
					−1	0	1	0	1	2	1	2	1				
						○	○	△	○	○	△	○	△	△			
						1	2	1	2	3	2	3	2	1			良い列
							○	△	○	○	△	○	△	△	○		
							1	0	1	2	1	2	1	0	1		
								△	○	○	△	○	△	△	○	○	
								−1	0	1	0	1	0	−1	0	1	

良い列の見つけ方

上の例のようにすべての列を調べて良い列を探す必要はない。最初に並べた列を調べて良い列でなかったら，下に書いた数の最小値の位置に注目する。最小値が複数あったら，そのうちの一番右の位置に注目する。それが右端になるように，それ以前を末尾に移動すると，良い列になる。

以上のことから n 変数の後置記法の式，すなわち良い列は，$\dfrac{{}_{2n-1}\mathrm{C}_n}{2n-1}$ 個あることがわかる。