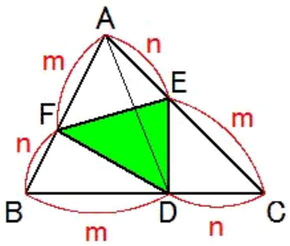
1　三角形の中の三角形

三角形 ABC の 3 辺 BC, CA, AB をそれぞれ $m:n$ に内分する点を D, E, F とする。

問題 1.1 三角形 DEF の面積と三角形 ABC の面積の比を求めよ。



解答

$$\frac{\triangle \mathrm{ABD}}{\triangle \mathrm{ABC}} = \frac{m}{m+n}, \quad \frac{\triangle \mathrm{FBD}}{\triangle \mathrm{ABD}} = \frac{n}{m+n},$$
$$\therefore \frac{\triangle \mathrm{FBD}}{\triangle \mathrm{ABC}} = \frac{mn}{(m+n)^2}$$

同様に

$$\frac{\triangle \mathrm{DCE}}{\triangle \mathrm{ABC}} = \frac{mn}{(m+n)^2}, \quad \frac{\triangle \mathrm{EAF}}{\triangle \mathrm{ABC}} = \frac{mn}{(m+n)^2}$$

ゆえに

$$\frac{\triangle \mathrm{DEF}}{\triangle \mathrm{ABC}} = \frac{(m+n)^2 - 3mn}{(m+n)^2} = \frac{m^2 - mn + n^2}{(m+n)^2} \left(= \frac{m^3 + n^3}{(m+n)^3} \right)$$

別解（略解）

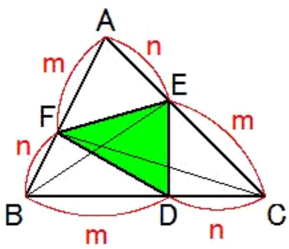
$$\frac{\triangle \mathrm{BEF}}{\triangle \mathrm{ABC}} = \frac{n^2}{(m+n)^2}$$
$$\frac{\triangle \mathrm{CEF}}{\triangle \mathrm{ABC}} = \frac{m^2}{(m+n)^2}$$

D は BC の $m:n$ の内分点だから

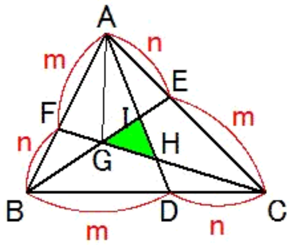
$$\triangle \mathrm{DEF} = \frac{n\triangle \mathrm{BEF} + m\triangle \mathrm{CEF}}{m+n}$$

ゆえに

$$\frac{\triangle \mathrm{DEF}}{\triangle \mathrm{ABC}} = \frac{n^3 + m^3}{(m+n)^3}$$



問題 1.2 3 直線 AD, BE, CF で角まれる三角形 GHI の面積と三角形 ABC の面積の比を求めよ。



解答

$$\triangle\mathrm{GCA} : \triangle\mathrm{GCB} = \mathrm{FA} : \mathrm{FB} = m : n, \quad \triangle\mathrm{GBC} : \triangle\mathrm{GBA} = \mathrm{EC} : \mathrm{EA} = m : n,$$
$$\therefore\ \triangle\mathrm{GCA} : \triangle\mathrm{GBC} : \triangle\mathrm{GAB} = m^2 : mn : n^2$$

よって

$$\frac{\triangle\mathrm{GBC}}{\triangle\mathrm{ABC}} = \frac{mn}{m^2+mn+n^2}$$

同様に

$$\frac{\triangle\mathrm{HCA}}{\triangle\mathrm{ABC}} = \frac{mn}{m^2+mn+n^2}, \quad \frac{\triangle\mathrm{IAB}}{\triangle\mathrm{ABC}} = \frac{mn}{m^2+mn+n^2}$$

ゆえに

$$\frac{\triangle\mathrm{GHI}}{\triangle\mathrm{ABC}} = \frac{m^2+mn+n^2-3mn}{m^2+mn+n^2} = \frac{(m-n)^2}{m^2+mn+n^2} \left(= \frac{(m-n)^3}{m^3-n^3} \right)$$