

0.9999... = 1 ?

この質問に対する回答をいくつか紹介します。

(1) 兎と亀

兎さんは足が速く 10 秒で 100 m 走りますが、亀さんは 10 秒でやっと 10 m しか進みません。

ある日、兎さんの挑発に発奮した亀さんは、「向こうの小山の麓までどちらが先に駆けつくか」競争することを提案しました。

猛ダッシュした兎さんは、大きくリードしたのに気をよくして、ゴールの手前 100 m のところで居眠りをしてしまいました。その間に亀さんは着実に歩を進めて、眠っている兎さんを追い越して行きました。

兎さんが目を覚ました時には、亀さんは 90 m 先、ゴールまで 10 m の所まで進んでいました。兎さんは慌てて走り出しましたが、はたして亀さんに追いつくことができたでしょうか。

- (1) 兎さんはさっき亀さんがいた 90 m 地点に 9 秒後に着きました。しかし、亀さんもその間に 99 m 地点まで進んでいたの追いつけません。
- (2) さらに亀さんがいた 99 m 地点まで 9.9 秒後に着きましたが、亀さんは 99.9 m まで進んでいてやはり追いつけません。
- (3) またまた亀さんがいた 99.9 m 地点まで 9.99 秒後に着きましたが、亀さんは 99.99 m まで進んでいて追いつけません。

.....

(∞) このように無限に続いて、兎さんは亀さんに追いつくことはできませんでした。

いえいえ、そんなことはありません。この文章が無限にあったとしても、時間が無限に経過したわけではありません。

9.9999... (無限に続く) 秒後には、兎さんが到達した地点も、亀さんが到達した地点も、99.999... (無限に続く) m です。有限で切ると、亀さんの方が 9 が 1 個多いのですが、無限に続けると一致してしまいます。ですから、この地点で兎さんが亀さんに追いついたのです。

ところで、ふつうに考えれば、兎さんが目を覚ました時、ゴールまで 100 m の地点にいて、亀さんが後 10 m の地点にいたのですから、10 秒後に一緒にゴールインすることは当たり前ですね。

ということで、追いついた時間と地点を考えると、つぎのことがわかります。

$$9.9999\dots(\text{無限に続く}) = 10 \text{ 秒}$$

$$99.999\dots(\text{無限に続く}) = 100 \text{ m}$$

(2) 計算による説明

(1)

$$\frac{1}{9} = 0.1111\dots$$

両辺に 9 をかける

$$1 = 0.9999\dots$$

(2)

$$x = 0.9999\dots \quad \dots \textcircled{1} \text{ とおく}$$

両辺に 10 をかける

$$10x = 9.999\dots \quad \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2} - \textcircled{1}$ より

$$9x = 9$$
$$x = 1$$

(3)

$$0.9999\dots < 1$$

のような気がしますね。
もしそうだとすると

$$0.9999\dots < \frac{0.9999\dots + 1}{2}$$

となるはずですが

$$0.9999\dots < 0.9999\dots$$

これはおかしい。
やっぱり

$$0.9999\dots = 1$$

なんです。

(4)

$$1 - 0.9 = 0.1$$
$$1 - 0.99 = 0.01$$
$$1 - 0.999 = 0.001$$
$$\vdots$$
$$1 - 0.9999\dots = 0.0000\dots (\text{無限に続く}) = 0$$
$$\therefore 1 = 0.9999\dots$$

(3) 有限小数は 2 通りで表せる

$$\frac{1}{4} = 0.25 = 0.24999\dots (\text{無限に続く})$$

のように途中で割り切れる数は、2 通りで表されます。