質問

全然分からなくて困っています．宜しくお願いします．

> $n \times n$ のチェス盤上に n 個のルークを，互いに取り合わないように配置する．
>
> つぎのような配置の個数について，漸化式を求め，$n = 8$ のときの値を求めなさい．
>
> (1) チェス盤を時計回りに 90° 回転しても変わらない配置の個数 a_n.
>
> (2) チェス盤の中心点に関して対称であるような配置の個数 b_n.
>
> (3) チェス盤の 2 本の対角線に関して対称であるような配置の個数 c_n.

回答

ルークが n 個あるので,「互いに取り合わないように配置する」という条件は,「各行，各列に 1 つずつ置く」ということと同じです.

便宜上，$n = 0$ を考えると,「何も置かない」の 1 通りなので，$a_0 = b_0 = c_0 = 1$.

解答

(1) (i) n が奇数のとき

まず，中央の行に置く．中央のマスにしか置けない.

中央の行と中央の列を除いた，$(n-1) \times (n-1)$ に，残りを配置することになる.

$$a_n = a_{n-1}$$

(ii) n が偶数のとき

1 行目は，両端には置けない.

それ以外のマス $(1, k)$ $(k = 2, 3, \ldots, n-1)$ に置く（$n - 2$ 通り）.

すると，$(k, n), (n, n+1-k), (n+1-k, 1)$ に置くことが決まる.

この 4 つのマスを含む行と列を除いた，$(n-4) \times (n-4)$ に，残りを配置することになる.

$$a_n = (n-2)a_{n-4} \quad (n \geqq 4)$$

$$a_2 = 0$$

$$a_{4m+2} = 0$$

$$a_{4m} = (4m-2)a_{4m-4} = \frac{2m(2m-1)}{m}a_{4m-4}$$

$$\frac{m!}{(2m)!}a_{4m} = \frac{(m-1)!}{(2m-2)!}a_{4m-4} = \cdots = \frac{0!}{0!}a_0 = 1$$

$$\therefore\ a_{4m} = \frac{(2m)!}{m!}$$

(iii) まとめて

$$a_{4m} = a_{4m+1} = \frac{(2m)!}{m!}$$

$$a_{4m+2} = a_{4m+3} = 0$$

$$a_8 = \frac{4!}{2!} = 12$$

(2) (i) n が奇数のとき

(1) と同様

$$b_n = b_{n-1}$$

(ii) n が偶数のとき

1 行目のマス $(1, k)$ に置く（n 通り）.

すると，(n, k) に置くことが決まる.

この 2 つのマスを含む行と列を除いた $(n-2) \times (n-2)$ に配置することになる.

ゆえに

$$b_n = n\,b_{n-2} \quad (n \geqq 2)$$
$$b_2 = 2$$
$$b_{2m} = 2m\,b_{2m-2}$$
$$\frac{b_{2m}}{2^m\,m!} = \frac{b_{2m-2}}{2^{m-1}(m-1)!} = \cdots = \frac{b_0}{2^0 \cdot 0!} = 1$$
$$\therefore\ b_{2m} = 2^m\,m!$$

(iii) まとめて

$$b_{2m} = b_{2m+1} = 2^m\,m!$$
$$b_8 = 2^4 \cdot 4! = 384$$

(3) (i) n が奇数のとき

(1) と同様に

$$c_n = c_{n-1}$$

(ii) n が偶数のとき

1 行目の (1,1) または (1,n) に置いた場合（2 通り）と，$(1,k)$ $(2 \leqq k \leqq n-1)$ に置いた場合（$n-2$ 通り) に分けて，同様に考えると，

$$c_n = 2c_{n-2} + (n-2)c_{n-4} \quad (n \geqq 4)$$
$$c_2 = 2$$

(iii) まとめて

$$c_n = 2c_{n-2} + (n-2)c_{n-4} \quad (n \geqq 4)$$
$$c_0 = 1,\ c_1 = 1,\ c_2 = 2,\ c_3 = 2$$

$$c_4 = 2c_2 + 2c_0 = 6$$
$$c_6 = 2c_4 + 4c_2 = 20$$
$$c_8 = 2c_6 + 6c_4 = 76$$