

# 1 順番当てゲーム

## 1.1 ルール

- このゲームは、攻撃方と守備方との二人で行う。
- 守備方が5枚のカード  $A, K, Q, J, 10$  を一列に並べる。
- 攻撃方が何回か質問（攻撃）して、カードを並べる順番を当てる。  
ただし、質問は次の形のものに限る。

質問：  $A$  と  $K$ ?( $A$  と  $K$  はどちらを左に置きますか?)

回答：  $A - K$ ( $A$  を左,  $K$  を右に置きます), または  
 $K - A$ ( $K$  を左,  $A$  を右に置きます)

- 質問の回数で勝敗を決める。

攻撃方の勝ち 6回以下の質問で当てた場合

引き分け 7回質問して当てた場合

守備方の勝ち 7回質問しても当てられなかった場合

- 例

回	質問	回答
(1)	$A$ と $K$ ?	$A - K$ $A - K$ と決まった
(2)	$K$ と $Q$ ?	$Q - K$
(3)	$A$ と $Q$ ?	$A - Q$ $A - Q - K$ と決まった
(4)	$Q$ と $J$ ?	$J - Q$
(5)	$A$ と $J$ ?	$J - A$ $J - A - Q - K$ と決まった
(6)	$Q$ と $10$ ?	$10 - Q$
(7)	$J$ と $10$ ?	$J - 10$

わかりました,  $J - 10 - A - Q - K$  ですね

残念でした,  $J - 10 - Q - A - K$  です

7回で当てられなかったなので、守備方の勝ち。

注 1.1 守備方が並べたカードの順番を当てるだけならば、運がよければ早く当たる可能性がある。

このゲームでは、守備方は各回の回答（守備）をする前に、それまでの回答と矛盾しない範囲で並べかえてもよいことにする。

したがって、上の例のように、7回の攻防が終わった後で、それまでの回答と矛盾しない並べ方が2通り以上残っていたら、攻撃方が推理した並べ方と違うように並べかえられるので、守備方の勝ちになる。

パソコンが守備方役をするアプリケーションを、下記 URL からダウンロードできる。

<http://www.c6.dion.ne.jp/~ooya/Suuraku/ArrangeCardsP.exe>

## 1.2 上の例の攻撃についての考察

上の例の攻撃方は、

- まず  $A$  と  $K$  の配置を決める。
- 次に  $A$  と  $K$  と  $Q$  の配置を決める。
- 次に  $A$  と  $K$  と  $Q$  と  $J$  の配置を決める。
- そして  $A$  と  $K$  と  $Q$  と  $J$  と  $10$  の配置を決める。

という作戦で攻撃した。

しかし、7回の攻防の後で2通りの可能な並べ方が残ってしまい失敗した。それは7回目の質問が悪かったのだろうか。

### 1.2.1 6回の攻防後

6回目の攻防の後、次のように位置関係が決まっている。

$$\begin{array}{c} J - A - Q - K \\ / \\ 10 \end{array}$$

これを満たす並べ方は、次の3通り残っている。

$$\begin{array}{l} 10 - J - A - Q - K \\ J - 10 - A - Q - K \\ J - A - 10 - Q - K \end{array}$$

ゆえに、7回目の質問をどのようにしても、2つある回答候補のうち一方は、それを満たす並べ方が2通り以上残ってしまい、守備方が勝つ。

あと1回の質問で当てるためには、残っている並べ方が2通り以下でなければならない

### 1.2.2 5回の攻防後

5回の質問で、 $A \sim J$ の4枚の配置がわかった。

$$J - A - Q - K$$

これを満たす並べ方は、 $10$ をどこに置くかで、5通り残っている。

6回目の質問をどのようにしても、2つある回答候補のうち一方は、それを満たす並べ方が3通り以上残ってしまい、守備方がそちらを回答すれば、あと1回の質問では当てられない。

あと2回の質問で当てるためには、残っている並べ方が4通り以下でなければならない

### 1.2.3 $k$ 回の質問で当てるための必要条件

このように考えていくと、あと $k$ 回の質問で当てるために必要な条件がわかる。

あと $k$ 回の質問で当てるためには、残っている並べ方が $2^k$ 通り以下でなければならない

### 1.3 正しい質問

1 回目の攻防 どの 2 枚を質問しても同様であり，回答がどちらでも以後の考え方が同様なので，次のように進んだとする。

(1)  $A$  と  $K$  ?  $A-K$

2 回目の質問 1 回目に質問したカードと他のカードを訊くか，他のカードどうしを訊くか，2 通り考えられる。

(ア)  $K$  と  $Q$  ?

(イ)  $Q$  と  $J$  ?

問題 1.1 2 回の攻防の後は，5 回の質問で当てるために，可能な並べ方が  $2^5 = 32$  通り以下でなければならない。上の 2 つの質問で正しいのはどちらか。各回答について，可能な並べ方を数えて答えなさい。

#### 3 回目の質問

2 回目まで次のように進んだとする。

(1)  $A$  と  $K$  ?  $A-K$

(2)  $Q$  と  $J$  ?  $Q-J$

問題 1.2 3 回目の質問として正しいものは次のどれか。各回答について，可能な並べ方を数えて答えなさい。

(ア)  $K$  と  $Q$  ?

(イ)  $K$  と  $J$  ?

(ウ)  $K$  と  $10$  ?

#### 4 回目の質問

3 回目まで次のように進んだとする。

(1)  $A$  と  $K$  ?  $A-K$

(2)  $Q$  と  $J$  ?  $Q-J$

(3)  $K$  と  $J$  ?  $K-J$

問題 1.3 4 回目の質問として正しいのはどれか。各回答について，可能な並べ方を数えて答えなさい。

(ア)  $A$  と  $Q$  ?

(イ)  $K$  と  $Q$  ?

(ウ)  $A$  と  $10$  ?

(エ)  $K$  と  $10$  ?

(オ)  $Q$  と  $10$  ?

(カ)  $J$  と  $10$  ?

## 1.4 解答

開始前 5枚のカード A~10 の並べ方は 5! 通りある。

(0) 開始前 120 通り  $\leq 2^7$

1回目

(1) A と K?  $A - K \rightarrow \boxed{A - K}$  60 通り  $\leq 2^6$   
 $K - A \rightarrow \boxed{K - A}$  60 通り  $\leq 2^6$

どちらの回答でも同様なので

(1) A と K?  $A - K \rightarrow \boxed{A - K}$  60 通り  $\leq 2^6$

とする。

2回目

(ア) K と Q?  $K - Q \rightarrow \boxed{A - K - Q}$  20 通り  $\leq 2^5$

$Q - K \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline A - K \\ \hline / \\ \hline Q \\ \hline \end{array}$  40 通り  $> 2^5$

(イ) Q と J?  $Q - J \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline A - K \\ \hline Q - J \\ \hline \end{array}$  30 通り  $\leq 2^5$

$J - Q \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline A - K \\ \hline J - Q \\ \hline \end{array}$  30 通り  $\leq 2^5$

(イ) が正しい。

どちらの回答でも同様なので

(2) Q と J?  $Q - J \rightarrow \boxed{\begin{array}{|c|} \hline A - K \\ \hline Q - J \\ \hline \end{array}}$  30 通り  $\leq 2^5$

とする。

3回目

(ア)	KとQ?	K-Q	→	A-K-Q-J	5通り $\leq 2^4$				
		Q-K	→	<table style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">A-K</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">/</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">Q-J</td></tr> </table>	A-K	/	Q-J	25通り $> 2^4$	
A-K									
/									
Q-J									
(イ)	KとJ?	K-J	→	<table style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">A-K-J</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">/</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">Q</td></tr> </table>	A-K-J	/	Q	15通り $\leq 2^4$	
A-K-J									
/									
Q									
		J-K	→	<table style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">A</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">\</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">Q-J-K</td></tr> </table>	A	\	Q-J-K	15通り $\leq 2^4$	
A									
\									
Q-J-K									
(ウ)	Kと10?	K-10	→	<table style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">A-K-10</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">Q-J</td></tr> </table>	A-K-10	Q-J	10通り $\leq 2^4$		
A-K-10									
Q-J									
		10-K	→	<table style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">A-K</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">/</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">10</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">J-Q</td></tr> </table>	A-K	/	10	J-Q	20通り $> 2^4$
A-K									
/									
10									
J-Q									

(イ)が正しい。

どちらの回答でも同様なので

(3)	KとJ?	K-J	→	<table style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">A-K-J</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">/</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">Q</td></tr> </table>	A-K-J	/	Q	15通り $\leq 2^4$
A-K-J								
/								
Q								

とする。

4回目

(ア)	AとQ?	Q-A	→	Q-A-K-J	5通り $\leq 2^3$			
		A-Q	→	<table style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">A-K-J</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">\ /</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">Q</td></tr> </table>	A-K-J	\ /	Q	10通り $> 2^3$
A-K-J								
\ /								
Q								
(イ)	KとQ?	K-Q	→	A-K-Q-J	5通り $\leq 2^3$			
		Q-K	→	<table style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">A-K-J</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">/</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">Q</td></tr> </table>	A-K-J	/	Q	10通り $\leq 2^3$
A-K-J								
/								
Q								

(ウ)	A と 10 ?	10 - A	→	$10 - A - K - J$ / $Q$	4 通り $\leq 2^3$
		A - 10	→	$10$ / $A - K - J$ / $Q$	11 通り $> 2^3$
(エ)	K と 10 ?	K - 10	→	$10$ / $A - K - J$ / $Q$	7 通り $\leq 2^3$
		10 - K	→	$10$ \ $A - K - J$ / $Q$	8 通り $\leq 2^3$
(オ)	Q と 10 ?	10 - Q	→	$A - K - J$ / $10 - Q$	6 通り $\leq 2^3$
		Q - 10	→	$A - K - J$ / $Q - 10$	9 通り $> 2^3$
(カ)	J と 10 ?	J - 10	→	$A - K - J - 10$ / $Q$	3 通り $\leq 2^3$
		10 - J	→	$10$ \ $A - K - J$ / $Q$	12 通り $> 2^3$

ゆえに, (エ) が正しい。

問題 1.4 (エ) の回答それぞれに対して, 以後 3 回の質問を考えなさい。