石取りゲームの必勝法

最初に碁石を山にして積んでおく。決められたルールに従って, 2 人のプレイヤーが交互にこの山から石を取っていき，最後に石を取った方を勝ち (石を取れなくなった方を負け) とするゲームを総称して石取りゲームという。石を取るルールを変えることによって，いろいろなゲームが考えられる。数学的に興味深いいくつかのゲームについて必勝法を述べる。

1 ゲーム I

ルール I　1 回に 1〜3 個取ることができる。

まず簡単なゲームで必勝法の求め方を説明する。

ゲームのある局面において，それ以後プレイヤー B が どんな 取り方をしても，プレイヤー A がそれに応じて うまい 取り方をしていけば勝つことができるとき，その局面をプレイヤー A の**必勝形**，そのうまい取り方を A の**必勝法**という。今度石を取る手番のプレイヤーの必勝形を**先手必勝形**，次に石を取る手番のプレイヤーの必勝形を**後手必勝形**という。この場合の先手とは，ゲーム全体の先手のことではなく，その局面の先手をさす。だから，同じプレイヤーが 先手, 後手, 先手, 後手, ... と交互に変わっていく。

ゲーム I の必勝形を，残っている石の個数 n が小さい局面から順に調べていく。

$n = 1, 2, 3$ の局面は，石を全部取ることができるので，先手必勝形である。

$n = 4$ の局面は，何個 (もちろん 1〜3 個) 取っても，上で調べた先手必勝形になるので，次の局面の先手すなわち相手の必勝形である。したがって，$n = 4$ は後手必勝形である。

$n = 5$ の局面は，2 個または 3 個取ると残りが 3 個または 2 個で先手 (相手) 必勝形になる。しかし，1 個取れば残りは 4 個で後手 (自分) 必勝形になる。したがって，$n = 5$ は先手必勝形である。

$n = 6, 7$ の局面は，同様に後手 (自分) 必勝形の 4 個になるように取れるので，先手必勝形である。

この考え方を続けて，残りの石の個数 n とそのとき取るべき石の個数 $w(n)$ を表にするとこのようになる。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\cdots$
$w(n)$	1	2	3	×	1	2	3	×	1	2	3	×	$\cdots$

$w(n)$ の欄に×が書いてある n は，取るべき石の個数がない，すなわち後手必勝形である。

この表から次の定理が類推される[1]。

定理　ゲーム I において，残っている石の個数 n が 4 の倍数の局面は後手必勝で，それ以外は先手必勝である。必勝法は $n \bmod 4$ 個[2]取ることである。

この類推が正しいことはほとんど明らかだが，念のために証明する。

[1] 観察や実験などで得られたいくつかの事実から一般的な結論を類推することを帰納法という。類推が正しいとは限らないので証明しないといけない。数学的帰納法で証明することが多い。

[2] n を p で割った余りを $n \bmod p$ と書く。

証明　定理の主張を P_n とし，n に関する数学的帰納法で証明する。

(i) $n = 1, 2, 3$ のとき
$n(= n \bmod 4)$ 個取って先手が勝つ。ゆえに，P_1, P_2, P_3 が成り立つ。

(ii) $n \geqq 4$ のとき
$P_m(m < n)$ が成り立っているとする。

(1) n が 4 の倍数のとき，$m = n-1, n-2, n-3$ はどれも 4 の倍数でない。ゆえに，これらは先手 (相手) 必勝である。したがって，n は後手必勝である。

(2) n が 4 の倍数でないとき，$1 \leqq n \bmod 4 \leqq 3$ で $m = n - (n \bmod 4)$ は 4 の倍数である。ゆえに，m は後手 (自分) 必勝である。したがって，n は先手必勝で，必勝法は $n \bmod 4$ 個取ることである。

ゆえに，P_n が成り立つ。

■

2　ゲーム II

ルール II　直前に相手が取った石の個数以下だけ取ることができる。ただし，最初に取る人は全部取らない限り何個でも取ることができる。

このゲームでは，誰かが 1 個取ったとすると，以後は 1 個ずつ取るしかできない。最後に取った方が勝ちだから，奇数個残っているときに 1 個取れば勝てる。

では偶数個残っているときはどうしたらよいか。1 個取ったら負けてしまう。2 個取ると，以後（1 個取ったら負けるので）2 個ずつの取り合いになる。だから奇数個の 2 倍残っているときに 2 個取れば勝てる。

偶数個の 2 倍すなわち 4 の倍数個残っているときは，4 個ずつの取り合いになり，奇数個の 4 倍残っているときに 4 個取れば勝てる。

以下同様で，次の定理が成り立つ。

定理　ゲーム II において，残っている石の個数を $n = 2^p(2q+1)$ の形で表す。ルール上 2^p 個取ることができれば先手必勝，取ることができなければ後手必勝である。
特にゲーム開始時は，全部取らない限りいくつでも取れるので $n = 2^p$ なら後手必勝，それ以外は先手必勝である。

以上で必勝法がわかったが，より複雑なルールのゲームの解析にも役立つ別の考え方で求めてみよう。

このゲームでは取れる石の個数がゲーム中に変わっていくので，n 個残っている局面で，これだけ取れば勝てるという**最小の**個数 $w(n)$ を求める。

アルゴリズム：ゲーム II の必勝法を求める

(1) $n = 1, 2, 3, \cdots$ について次のことを繰り返す。

(1.1) $k = 1, 2, 3, \cdots$ と調べていって，次のどちらかの条件を満たす最小の k を求める。

(i) $w(n-k) > k$ （k 個取ると勝てる）

(ii) $k = n$ （n 個全部取らないと勝てない）

(1.2) $w(n) = k$ とする。

このアルゴリズムにしたがって $w(n)$ を求めると下の表のようになる。

n	$w(n)$	コード	n	$w(n)$	コード	n	$w(n)$	コード	n	$w(n)$	コード
			8	8	1000	16	16	10000	24	8	11000
1	1	1	9	1	1001	17	1	10001	25	1	11001
2	2	10	10	2	1010	18	2	10010	26	2	11010
3	1	11	11	1	1011	19	1	10011	27	1	11011
4	4	100	12	4	1100	20	4	10100	28	4	11100
5	1	101	13	1	1101	21	1	10101	29	1	11101
6	2	110	14	2	1110	22	2	10110	30	2	11110
7	1	111	15	1	1111	23	1	10111	31	1	11111

この表には，$w(n)$ の他にコードというものが書いてある。$w(n) = n$ を満たす n を小さい方から順に $b_1, b_2, b_3, \cdots$ とし，b_k のコードを $1\underbrace{0\cdots0}_{k-1}$，それ以外の n のコードを $w(n)$ のコードと $n - w(n)$ のコードを足した値としたものである。

アルゴリズム：ゲーム II のコードを求める

(1) code=1 とする。

(2) $n = 1, 2, 3, \cdots$ について次のことを繰り返す。

(2.1) $w(n) = n$ かどうかで場合分けする。

(2.1.1) $w(n) = n$ の場合:

(2.1.1.1) code を n のコードとする。

(2.1.1.2) code の右に 0 を追加する。

(2.1.2) $w(n) < n$ の場合:

(2.1.2.1) $w(n)$ のコードと $n - w(n)$ のコードを足した値を n のコードとする。

b_{k-1} と b_k の間にある数 $b_{k-1}+1, \cdots, b_k - 1$ のコードの先頭の 1 と引き続いている 0 を取り除くとちょうど $1, \cdots, b_{k-1} - 1$ のコードと一致する。ゆえに，b_k は b_{k-1} から数えて b_{k-1} 番目の数ということがわかり，次の漸化式と一般項が得られる。

$$b_k = 2b_{k-1} \quad (k = 2, 3, 4, \cdots)$$
$$\therefore\ b_n = 2b_{n-1} = 2^2 b_{n-2} = \cdots = 2^{n-1} b_1 = 2^{n-1}$$

たとえば $n = 22$ のコード 10110 は，次のような意味がある。

$$22 = 1\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0 = 2^4 + 2^2 + 2^1 = 16 + 4 + 2$$

すなわち，このゲームのコードは n を 2 進法で表したものである。

必勝法は次のように表現することもできる。

定理　ゲーム II の必勝法
n を 2 進法で表したとき，最も右にある 1 を 0 に変えるように取ることである。ルール上，そのように取れれば先手必勝，とれなければ後手必勝である。

3　ゲーム III

> **ルール** III　直前に相手が取った石の個数の 2 倍以下だけ取ることができる。ただし，最初に取る人は全部取らない限り何個でも取ることができる。

たとえば，相手が 3 個取ったら 1 個ないし 6 個取ることができる。今まで述べた 2 つのゲームと違って，必勝法が簡単にはわからない。

まず，次のアルゴリズムにしたがって，n 個の石が残っている局面で，これだけ取ったら勝てるという最小の個数 $w(n)$ と，それによって定まる n のコードを求めよう。

アルゴリズム：**ゲーム** 3 **の必勝法とコードを求める**

(1) code $= 1$ とする。

(2) $n = 1, 2, 3, \cdots$ について次のことを繰り返す。

(2.1) $k = 1, 2, 3, \cdots$ と調べていって，次のどちらかの条件を満たす最小の k を求める。
　(i)　$w(n-k) > 2k$　(k 個取ると勝てる)
　(ii)　$k = n$　(n 個全部取らないと勝てない)

(2.2) $w(n) = k$ とする。

(2.3) $w(n) = n$ かどうかで場合分けする。

(2.3.1) $w(n) = n$ の場合:
　(2.3.1.1) code を n のコードとする。
　(2.3.1.2) code の右に 0 を追加する。

(2.3.2) $w(n) < n$ の場合:
　(2.3.2.1) $w(n)$ のコードと $n - w(n)$ のコードを足し算した結果を n のコードとする。

ゲーム II の 2 つのアルゴリズムを 1 つにまとめて，(2.1) の条件 (i) をルール III に合わせて変えただけである。

これを実行すると下の表が得られる。

n	$w(n)$	コード	n	$w(n)$	コード	n	$w(n)$	コード	n	$w(n)$	コード
			8	8	10000	16	3	100100	24	3	1000100
1	1	1	9	1	10001	17	1	100101	25	1	1000101
2	2	10	10	2	10010	18	5	101000	26	5	1001000
3	3	100	11	3	10100	19	1	101001	27	1	1001001
4	1	101	12	1	10101	20	2	101010	28	2	1001010
5	5	1000	13	13	100000	21	21	1000000	29	8	1010000
6	1	1001	14	1	100001	22	1	1000001	30	1	1010001
7	2	1010	15	2	100010	23	2	1000010	31	2	1010010

ゲーム II のコードは，1 で始まり 0 と 1 からなる列がすべて現れたが，ゲーム III のコードではとびとびに現れている。抜けている列を並べてみると

$$11\ ,\ 110\ ,\ 111\ ,\ 1011\ ,\ 1100\ ,\ 1101\ ,\ 1110\ ,\ 1111\ ,\cdots$$

みな 1 が隣り合っている。実は，ゲーム III のコードは，1 で始まり 0 と 1 からなる列のうち，1 が隣り合ってないものの全体である。

$w(n) = n$ となっている n を小さい方から順に $f_1, f_2, f_3, \cdots$ とし，f_{k-1} と f_k の間にある数 $f_{k-1}+1, \cdots, f_k - 1$ のコードの先頭の 1 と引き続いている 0 を取り除くとちょうど $1, \cdots, f_{k-2}-1$ と一致する。ゆえに，f_k は f_{k-1} から数えて f_{k-2} 番目の数ということがわかり，次の漸化式が得られる。

$$f_k = f_{k-1} + f_{k-2} \quad (k = 3, 4, 5, \cdots)$$

したがって $\{f_n\}$ は

$$1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 5\ ,\ 8\ ,\ 13\ ,\ 21\ ,\ 34\ ,\ 55\ ,\ 89\ ,\ \cdots$$

となる。

この数列を**フィボナッチ数列**，数列に現れる数を**フィボナッチ数**という。また n のコードを n の**フィボナッチ表現**といい，$\phi(n)$ で表すことにする。

たとえば 31 のフィボナッチ表現は $\phi(31) = 1010010$ で

$$31 = f_7 + f_5 + f_2 = 21 + 8 + 2$$

を意味している。このように，すべての自然数が隣り合わないフィボナッチ数の和として表される。この和に現れる最小のフィボナッチ数，すなわちフィボナッチ表現の最も右にある 1 に対応する f_k を $\ell(n)$ で表すことにする。たとえば

$$\ell(31) = f_2 = 2\ ,\ \ell(29) = f_5 = 8\ ,\ \ell(21) = f_7 = 21$$

定理　ゲーム III の必勝法

残っている石の個数が n のとき，$\ell(n)$ 個取ることが必勝法である。ルール上 $\ell(n)$ 個取れれば先手必勝，取れなければ後手必勝である。

証明

(1) n がフィボナッチ数のとき
$\ell(n) = n$ 個 (全部) 取れば勝ちである。

(2) n がフィボナッチ数でないとき
n のフィボナッチ表現 $\phi(n)$ には 1 が 2 個以上現れるから

$$\phi(n) = \cdots \overbrace{10\cdots0\underbrace{10\cdots0}_{k\text{ 個}}}^{i\text{ 個}}$$

とする。$\ell(n) = f_k$ 個取ると $m = n - f_k$ 個残って，

$$\ell(m) = f_i \geqq f_{k+2} = f_{k+1} + f_k > 2f_k$$

ゆえに，相手は $\ell(m)$ 個取ることはできない。

(3) 相手が $p(< f_i)$ 個取って $n' = m - p$ 個残したとする。$m - p$ の計算をフィボナッチ表現のままするには，下の 3 通りの計算に従って p の左の 1 から順に引いていく。

$$
\begin{array}{lr}
 & \cdots 1\,\overbrace{00000000}^{\text{偶数個}}\,\overbrace{00000}^{\text{0 個以上}} \\
- & 1\,00000 \\
\hline
 & \cdots 0\,10101010\,00000
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lr}
 & \cdots 1\,\overbrace{0000000}^{\text{奇数個}}\,\overbrace{000000}^{\text{1 個以上}} \\
- & 1\,000000 \\
\hline
 & \cdots 0\,1010100\,100000
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lr}
 & \cdots 1\,\overbrace{0000000}^{\text{奇数個}} \\
- & 1 \\
\hline
 & \cdots 0\,1010101
\end{array}
$$

最後に（p の最も右にある）1 を引いたとき，計算方法によって，すぐ左の桁，すぐ右の桁，または同じ桁に 1 が残る。ゆえに，$\ell(p)$ を f_j とすると $\ell(n')$ は f_{j+1}, f_j, f_{j-1} のどれかになって，$\ell(n') \leqq 2\ell(p)$ なので，自分が $\ell(n')$ 個取ることができる。

したがって，いったん $\ell(n)$ 個取れば以後自分だけが $\ell(n')$ 個取ることができるので，最後の石を取るのは自分である。 ■

4 ゲーム IV

ルール IV　石が 2 つの山に分けておいてある。1 つの山から好きなだけ取るか，2 つの山から同じ個数だけ取ることができる。

片方が空になって山が 1 つになった局面と，2 つの山に同じ個数の石が残っている局面は，全部取り尽くせるので先手必勝であることが容易にわかる。

石が p 個の山と q 個の山が残っている局面を $\{p, q\}$ と表すことにする。順序は関係ないので，$\{p, q\}$ と $\{q, p\}$ は同一視する。

補題　$\{p, q\}$ が後手必勝で $k \neq 0$ のとき，$\{p', q'\} = \{p + k, q\}, \{p, q + k\}, \{p + k, q + k\}$ はすべて先手必勝である。

証明

(1) $k > 0$ の場合，$\{p', q'\}$ から $\{p, q\}$ にできるから，$\{p', q'\}$ は先手必勝である。

(2) $k < 0$ の場合，$\{p', q'\}$ が後手必勝であると仮定すると，$\{p, q\}$ から $\{p', q'\}$ にできるから，$\{p, q\}$ は先手必勝となり矛盾である。ゆえに，$\{p', q'\}$ は先手必勝である。

■

したがって，各 p に対して後手必勝となる $\{p,q\}$ は高々1 組しかない。また，各 n に対して $|p-q|=n$ を満たす $\{p,q\}$ で後手必勝となるものも高々1 組しかない。実は，ちょうど 1 組ある。

定理　$n>0$ に対して，後手必勝で $q-p=n$ である $\{p,q\}$ がただ 1 組定まる。この p,q を p_n,q_n と表す。

証明　$\{p_n,q_n\}$ が存在することを，n に関する数学的帰納法で示す。

(i) $n=1$ の場合
$\{1,2\}$ から可能な次の局面は $\{0,2\},\{1,1\},\{1,0\},\{0,1\}$ でどれも先手必勝である。ゆえに $\{1,2\}$ は後手必勝で，$p_1=1,q_1=2$ である。

(ii) $n>1$ の場合
$\{p_1,q_1\},\ldots,\{p_{n-1},q_{n-1}\}$ が定まったとする。$p_1,\cdots,p_{n-1},q_1,\cdots,q_{n-1}$ と異なる最小の自然数を p_n，p_n+n を q_n とする。$\{p_n,q_n\}$ が後手必勝であることを示せばよい。便宜上 $\{p_0,q_0\}=\{0,0\}$ も後手必勝（先手が石を取れないから後手の勝ち）と考える。

(1) $\{p_n,q_n\}$ から $\{p',q'\}=\{p_n-r,q_n\}$ とした場合，$p'=p_k$ または $p'=q_k$ となる $k<n$ がある。

(a) $p'=p_k$ のとき，$q_k<p_n<q_n$ だから
$\{p',q'\}=\{p_k,q_n\}\to\{p'',q''\}=\{p_k,q_k\}$ となるように取れる。

(b) $p'=q_k$ のとき，$p_k<p_n<q_n$ だから
$\{p',q'\}=\{q_k,q_n\}\to\{p'',q''\}=\{q_k,p_k\}$ となるように取れる。

(2) $\{p_n,q_n\}$ から $\{p',q'\}=\{p_n,q_n-r\}$ とした場合，

(a) $q'<p_n$ のとき，(1) と同様に後手必勝の $\{p'',q''\}$ となるように取れる。

(b) $q'\geqq p_n$ のとき，$k=q'-p'$ とすると $k<q_n-p_n=n$ だから
$\{p',q'\}=\{p_n,p_n+k\}\to\{p'',q''\}=\{p_k,q_k\}$ となるように取れる。

(3) $\{p_n,q_n\}$ から $\{p',q'\}=\{p_n-r,q_n-r\}$ とした場合，$p'=p_k$ または $p'=q_k$ となる $k<n$ がある。

(a) $p'=p_k$ のとき，$q_k=p_k+k<p_k+n$ だから
$\{p',q'\}=\{p_k,p_k+n\}\to\{p'',q''\}=\{p_k,q_k\}$ となるように取れる。

(b) $p'=q_k$ のとき，$p_k<q_k<q_k+n$ だから
$\{p',q'\}=\{q_k,q_k+n\}\to\{p'',q''\}=\{q_k,p_k\}$ となるように取れる。

したがって，$\{p_n,q_n\}$ は後手必勝である。

■

これで必勝法がわかった。といっても，たとえば $n=20$ にたいする $\{p_n,q_n\}$ は何か，$\{100,r\}=\{p_n,q_n\}$ となる n,p_n,q_n は何かを求める簡単な方法がわからないと，実際のゲームで勝てない。わかり易い必勝法を見つけるために，$n=1,2,3,\cdots$ について，p_n,q_n を求めるとともに，そのフィボナッチ表現を表にしてみよう。

アルゴリズム：**ゲーム** IV **の後手必勝形** $\{p_n, q_n\}$ **を求める**

(1) $n = 1, 2, 3, \cdots$ について次のことを繰り返す。

(1.1) $p_k, q_k (k < n)$ として使われてない最小の自然数を p_n とする。

(1.2) $p_n + n$ を q_n とする。

(1.3) n, p_n, q_n とそのフィボナッチ表現を書く。

n		p_n		q_n		n		p_n		q_n	
1	1	1	1	2	10	11	10100	17	100101	28	1001010
2	10	3	100	5	1000	12	10101	19	101001	31	1010010
3	100	4	101	7	1010	13	100000	21	1000000	34	10000000
4	101	6	1001	10	10010	14	100001	22	1000001	36	10000010
5	1000	8	10000	13	100000	15	100010	24	1000100	39	10001000
6	1001	9	10001	15	100010	16	100100	25	1000101	41	10001010
7	1010	11	10100	18	101000	17	100101	27	1001001	44	10010010
8	10000	12	10101	20	101010	18	101000	29	1010000	47	10100000
9	10001	14	100001	23	1000010	19	101001	30	1010001	49	10100010
10	10010	16	100100	26	1001000	20	101010	32	1010100	52	10101000

表のフィボナッチ表現を眺めているといくつか面白い性質が見つかる。

【1】$\phi(q_n)$ は $\phi(p_n)$ の右に 0 を 1 つ追加したものである。

x のフィボナッチ表現の右に 0 を追加して得られるフィボナッチ表現をもつ数を $\mathrm{up}(x)$ と書くことにする。それは，x を構成するフィボナッチ数をそれぞれ 1 項ずつ大きくしたものである。

$$x = f_{k_1} + f_{k_2} + \cdots + f_{k_\ell} \to \mathrm{up}(x) = f_{k_1+1} + f_{k_2+1} + \cdots + f_{k_\ell+1}$$

【2】$\phi(p_n)$ の最も右にある 1 より右には 0 が**偶数個**あり，
$\phi(q_n)$ の最も右にある 1 より右には 0 が**奇数個**ある。

このような数をそれぞれ**偶零数**，**奇零数**，偶零数の中で特に 0 がないもの，すなわち右端が 1 のものを**無零数**と呼ぶことにする。

【3】n が奇零数のとき，$\phi(p_n)$ は $\phi(n)$ の右に 0 を 1 つ追加したものである。すなわち，$p_n = \mathrm{up}(n)$。
n が偶零数のとき，$\phi(p_n)$ は $\phi(n-1)$ の右に 1 を 1 つ追加したものである。これは $\phi(n)$ の右に 0 を 1 つ追加してから 1 引いたものと同じである。すなわち，$p_n = \mathrm{up}(n) - 1$。

$$\begin{array}{ccc} n & p_n & q_n \\ \cdots 1\underbrace{00000}_{\text{奇数個}} & \cdots 1\underbrace{00000}0 & \cdots 1\underbrace{00000}00 \\ \cdots 1\underbrace{000000}_{\text{偶数個}} & \cdots 0\underbrace{101010}1 & \cdots 0\underbrace{101010}10 \end{array}$$

【4】n が無零数ならば，$n+1$ は奇零数である。
n が無零数以外の偶零数ならば，$n+1$ は無零数である。
n が奇零数ならば，$n+1$ は偶零数である。

これらの性質は表から類推しただけなので証明しなくてはいけない。

まずフィボナッチ数列自身の性質である【4】を証明する。

証明　フィボナッチ表現によるプラス 1 の計算は次の 3 パターンがある。

$$
\begin{array}{lr}
 & \cdots 00\overbrace{10101010}^{0\text{ 組以上}}1 \\
+ & 1 \\
\hline
 & \cdots 01\,00000000\,0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lr}
 & \cdots 00\overbrace{10101010}^{0\text{ 組以上}}10 \\
+ & 1 \\
\hline
 & \cdots 01\,00000000\,00
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lr}
 & \cdots 1\overbrace{00000000}^{0\text{ 個以上}}00 \\
+ & 1 \\
\hline
 & \cdots 1\,00000000\,01
\end{array}
$$

いずれも，性質【4】を満たしていることがわかる。 ■

性質【1】～【3】は次の定理から導かれる。

定理　p_n, q_n はそれぞれ n 番目の偶零数，奇零数で，n から次のようにして得られる。

n が奇零数の場合，$p_n = \mathrm{up}(n), \quad q_n = \mathrm{up}(p_n)$

n が偶零数の場合，$p_n = \mathrm{up}(n) - 1, \quad q_n = \mathrm{up}(p_n)$

証明　n に関する数学的帰納法で示す。

(i) $n = 1$ のとき
$p_1 = 1, q_1 = 2$ は要件を満たしている。

(ii) $n \geqq 1$ のとき
p_m, q_m $(m \leqq n)$ は要件を満たしているとする。

(1) n が無零数の場合
$p_n+1 = \mathrm{up}(n)$ は奇零数で $p_n+1 \leqq p_n+n = q_n$ なので，すでに q_m として使われている。
$p_n + 2$ は偶零数でまだ p_m として使われていない。ゆえに，$p_{n+1} = p_n + 2 = \mathrm{up}(n) + 1$ で，これは $n + 1$ 番目の偶零数である。
$n + 1$ は奇零数である。n のフィボナッチ表現を $\cdots 01$ とおいて，$n + 1$ と p_{n+1} のフィボナッチ表現を比べてみる。

$$
\begin{aligned}
\phi(n+1) &: \quad \cdots 01 + 1 = \cdots 00 + 10 \\
\phi(\mathrm{up}(n)+1) &: \quad \cdots 010 + 1 = \cdots 000 + 100
\end{aligned}
$$

ゆえに，$p_{n+1} = \mathrm{up}(n+1)$ 。

(2) n が無零数以外の偶零数の場合
やはり，$p_{n+1} = p_n + 2 = \mathrm{up}(n) + 1$ で，$n+1$ 番目の偶零数である。

$n+1$ は偶零数である。n のフィボナッチ表現を $\cdots 1\overbrace{000000}^{\text{偶数個}}$ とおいて，$n+1$ と $p_{n+1}+1$ のフィボナッチ表現を比べてみる。

$$\begin{aligned} \phi(n+1) &: \cdots 1\overbrace{000000}+1 \\ \phi(\mathrm{up}(n)+2) &: \cdots 1\overbrace{000000}0+10 \end{aligned}$$

ゆえに，$p_{n+1} = \mathrm{up}(n+1) - 1$

(3) n が奇零数の場合
$p_n + 1 = \mathrm{up}(n) + 1$ は偶零数でまだ使われていない。ゆえに，$p_{n+1} = p_n + 1$ で，$n+1$ 番目の偶零数である。

$n+1$ は偶零数である。n のフィボナッチ表現を $\cdots 1\overbrace{00000}^{\text{奇数個}}$ とおいて，$n+1$ と $p_{n+1}+1$ のフィボナッチ表現を比べてみる。

$$\begin{aligned} \phi(n+1) &: \cdots 1\overbrace{00000}+1 \\ \phi(\mathrm{up}(n)+2) &: \cdots 1\overbrace{00000}0+10 \end{aligned}$$

ゆえに，$p_{n+1} = \mathrm{up}(n+1) - 1$

どの場合も，$p_{n+1} = \mathrm{up}(n) + 1$ であるから

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= p_{n+1} + (n+1) \\ &= \mathrm{up}(n) + 1 + n + 1 \\ &= \mathrm{up}(\mathrm{up}(n)) + 2 \\ &= \mathrm{up}(\mathrm{up}(n) + 1) \\ &= \mathrm{up}(p_{n+1}) \end{aligned}$$

ゆえに，q_{n+1} は $n+1$ 番目の奇零数である。
したがって，p_{n+1}, q_{n+1} は要件を満たしている。 ■

このことから，実戦に有用な必勝法がわかる。

ゲーム IV の必勝法　2 つの山に石が p 個と q 個 $(p \leqq q)$ あるとき，$n = q - p$ と p のフィボナッチ表現を求めて判別する。

(1) $p = \mathrm{up}(n)$ の場合，後手必勝である。

(2) $p > \mathrm{up}(n)$ の場合，先手必勝である。
両方の山から $p - \mathrm{up}(n)(= q - \mathrm{up}(\mathrm{up}(n)))$ 個取ればよい。

(3) $p < \mathrm{up}(n)$ の場合，先手必勝である。

- p が偶零数のとき，q 個の山から $q - \mathrm{up}(p)$ 個取ればよい。
- p が奇零数のとき，q 個の山から $q - \mathrm{down}(p)$ 個取ればよい。
ただし，$\mathrm{down}(p)$ は p のフィボナッチ表現の右端の 0 を消去した列をフィボナッチ表現にもつ数を表す。