質問

数学オリンピックの問題ですが，力技以外で解く方法はありますか？

> 十進法で 10 桁の整数 M は，
> 最上位の数が M の中に現れる 0 の個数に等しく，
> 次の位の数が M の中に現れる 1 の個数に等しく，
> 以下同様に，
> 上から $k+1$ 桁目の数が M の中に現れる k の個数に等しいという $(0 \leqq k \leqq 9)$．
> このような M をすべて求めよ．

回答

一般に n 進法の解を求めてみましょう．

問題

> n 進法で n 桁の整数 M は，
> 上から $k+1$ 桁目の数が M の中に現れる k の個数に等しいという $(0 \leqq k \leqq n-1)$．
> このような M をすべて求めよ．

解答

$k+1$ 桁目の数を a_k とし，a_k の総和を S とする．

$$S = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} = n \qquad \cdots ①$$
$$0a_0 + 1a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + (n-1)a_{n-1} = S = n \qquad \cdots ②$$

① − ② より

$$a_0 - 0a_1 - 1a_2 - 2a_3 - \cdots - (n-2)a_{n-1} = 0$$
$$\therefore\ a_0 = 1a_2 + 2a_3 + \cdots + (n-2)a_{n-1} \qquad \cdots ③$$

$a_k > 0$ なる最大の k を K とする．
$a_k = 0\ (k = K+1, \ldots, n-1)$ だから

$$n - 1 - K \leqq a_0 \leqq K$$
$$2K \geqq n-1$$
$$K \geqq \frac{n-1}{2}$$

ただし，$K = 1$ の解はないので，$K \geqq 2$
$(K-1)a_K \leqq a_0 \leqq K$ だから

$$a_K \leqq \frac{K}{K-1} = 1 + \frac{1}{K-1}$$
$$\therefore\ a_K = 2\ (K = 2\ ,\ 3 \leqq n \leqq 5 \text{ のとき}) \quad \text{または} \quad a_K = 1$$

(1)　$a_K = 2$ の解

$$n = 4 \ : \ M = 2020$$
$$n = 5 \ : \ M = 21200$$

(2)　$a_K = 1$ の解

$$K \geqq a_0 = 1a_2 + 2a_3 + \cdots + (K-2)a_{K-1} + (K-1)a_K \geqq K - 1$$
$$\therefore \ a_0 = K - 1 \quad \text{または} \quad a_0 = K$$

(i)　$a_0 = K - 1$ のとき
$a_k = 0 \ (2 \leqq k < K)$ だから

$$K - 1 = 1$$
$$a_0 = 1,\ a_1 = 2,\ a_2 = 1,\ a_k = 0 \ (k \geqq 3)$$
ただし, $n = 4$

(ii)　$a_0 = K$ のとき
$a_2 = 1$　かつ　$a_k = 0 \ (3 \leqq k < K)$　かつ　$a_K = 1$ だから

$$a_1 = n - K - 2 \quad \text{かつ} \quad a_1 = 2$$
$$K = n - 4$$
$$a_0 = n - 4,\ a_1 = 2,\ a_2 = 1,\ a_{n-4} = 1,\ \text{他は } 0$$
ただし, $n \geqq 7$

すべての M

n	M
4	2020
4	1210
5	21200
7	3211000
8	42101000
9	521001000
10	6210001000
$\vdots$	$\vdots$
16	C210000000001000
$\vdots$	$\vdots$