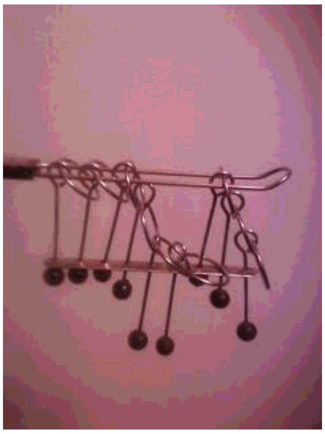
1　九連環とグレイコード

1.1　九連環（chinese ring）

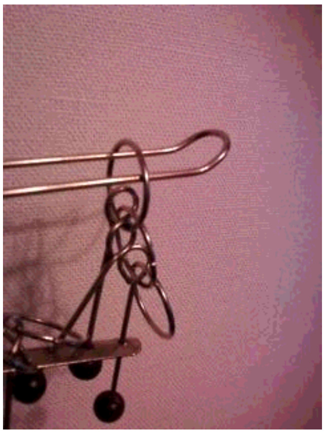
環を全部はめる，あるいは全部外すのが目的のパズル玩具である。

九連環



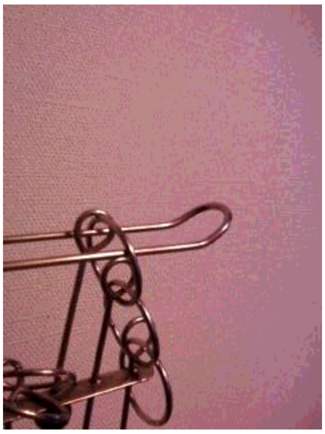
玉を吊っている吊り手が環の棹より下の部分にあるのは，間違ったはめ方である。

間違ったはめ方



吊り手が棹を下から上にくぐっていて，環の上の部分にあるのが，正しいはめ方である。

正しいはめ方



状態を 0 と 1 で表す

先端にある環から順に，1, 2, . . . , 9 番目と呼ぶ。それぞれの環がはまっている（吊り手の頭○が棹より上に出ている）状態を 1，外れている状態を 0 とし，右から順に並べる。

9	8	7	6	5	4	3	2	1	番
○	○			○					
		○	○		○	○	○	○	
1	1	0	0	1	0	0	0	0	

問題 1 状態を変えられる環

1 番の環は常に状態を変える（$0 \to 1$，$1 \to 0$）ことができる。

実は状態を変えられる環は 1 番の他にただ 1 つしかない。

110010000 の状態で，どの環を変えることができるかしらべなさい。

110010001 の状態で，どの環を変えることができるかしらべなさい。

解答 1 状態を変えることができるのは，つぎの 2 つである。

(P) 1 番の環

(Q) 最も右にある 1 のすぐ左の環

9	8	7	6	5	4	3	2	1	番
○	○			○					
		○	○		○	○	○	○	
1	1	0	0	1	0	0	0	0	
			↑					↑	
			Q					P	

9	8	7	6	5	4	3	2	1	番
○	○			○				○	
		○	○		○	○	○		
1	1	0	0	1	0	0	0	1	
							↑	↑	
							Q	P	

PP，QQ と同じ操作を続けると元に戻るので，$PQPQ\cdots$ または $QPQP\cdots$ と交互に繰返すしかない。

問題 2　110010000 の状態で 5 番の環を外すためには 110011000 の状態にしなくてはならない。

(1) 5 番の環を外して， 110001000 の状態にするまでの過程を書きなさい。
何手かかるか.

		110010000
1	P	110010001
2	Q	110010011
3	P	
4	Q	
5	P	
6	Q	
7	P	
8	Q	
9	P	
10	Q	
11	P	
12	Q	
13	P	
14	Q	
15	P	
16	Q	
17	P	
18	Q	

(2) 更に 4～1 番の環を外して， 110000000 の状態にするまでの過程を書きなさい。
何手かかるか.

		110001000
1	P	
2	Q	
3	P	
4	Q	
5	P	
6	Q	
7	P	
8	Q	
9	P	
10	Q	
11	P	
12	Q	
13	P	
14	Q	
15	P	
16	Q	
17	P	
18	Q	

解答 **2**

(1)

		110010000
1	P	110010001
2	Q	110010011
3	P	110010010
4	Q	110010110
5	P	110010111
6	Q	110010101
7	P	110010100
8	Q	110011100
9	P	110011101
10	Q	110011111
11	P	110011110
12	Q	110011010
13	P	110011011
14	Q	110011001
15	P	110011000
16	P	110001000
17	P	
18	Q	

16 手かかる．

(2)

		110001000
1	P	110001001
2	Q	110001011
3	P	110001010
4	Q	110001110
5	P	110001111
6	Q	110001101
7	P	110001100
8	Q	110000100
9	P	110000101
10	Q	110000111
11	P	110000110
12	Q	110000010
13	P	110000011
14	Q	110000001
15	P	110000000
16	Q	
17	P	
18	Q	

15 手かかる．

1.2　2 進グレイコード

すべての環が外れている状態 000000000 から，順々に環を嵌めて行く過程で，n 手進んだときの状態を n の **2 進グレイコード**という．

普通の 2 進数では，奇数 n が 1 増える（あるいは偶数 n が 1 減る）とき，一度に複数の桁が変化する．それに対し，2 進グレイコードは，n が 1 変化するとき常に 1 桁だけ変化する．この性質は貴重で，いろいろな所でグレイコードが使われている．

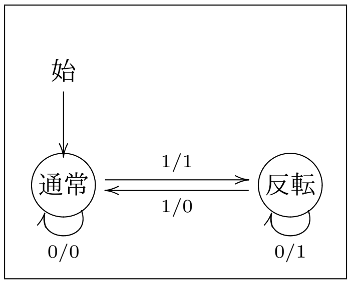
10 進	2 進	グレイコード	10 進	2 進	グレイコード	10 進	2 進	グレイコード	10 進	2 進	グレイコード
0	00000	00000	8	01000	01100	16	10000	11000	24	11000	10100
1	00001	00001	9	01001	01101	17	10001	11001	25	11001	10101
2	00010	00011	10	01010	01111	18	10010	11011	26	11010	10111
3	00011	00010	11	01011	01110	19	10011	11010	27	11011	10110
4	00100	00110	12	01100	01010	20	10100	11110	28	11100	10010
5	00101	00111	13	01101	01011	21	10101	11111	29	11101	10011
6	00110	00101	14	01110	01001	22	10110	11101	30	11110	10001
7	00111	00100	15	01111	01000	23	10111	11100	31	11111	10000

九連環のある状態からすべての環を外すのにかかる手数は，その状態のグレイコードを 10 進数に変換した数である．直接 10 進数に変換するよりも，2 進数を介して変換すると楽である．

1.3　2 進グレイコードを 10 進数に変換する手順

1.3.1　グレイコード $G \Rightarrow$ 2 進数 B

「通常モード」と「反転モード」の 2 つのモードを考える．
通常モードで始めて，グレイコード G を左から 1 桁ずつ読んで行き，モードと読んだ数字に応じて数字を書いていく．



(1)　通常モードのとき，
読んだ数字が 0 ならば，0 を書く．通常モードのまま．
読んだ数字が 1 ならば，1 を書く．反転モードに変わる．

(2)　反転モードのとき，
読んだ数字が 0 ならば，1 を書く．反転モードのまま．
読んだ数字が 1 ならば，0 を書く．通常モードに変わる．

G を読み終わったとき，書き並べた数字 (0,1) の列が B である．

1.3.2　2 進数 B ⇒8 進数 O

2 進数 B を右から 3 桁ずつ区切って，それぞれ (000〜111) を 8 進数 (0〜7) に置き換えると O が得られる．

1.3.3　8 進数 O ⇒10 進数 D

$D = 0$ から始めて，8 進数 O を左から読んでいく．
読んだ数字が n(0〜7) のとき，$n + D \times 8$ を新たに D とする．
O を読み終えたときの D が 10 進数である．

例 1 グレイコード 111001110 を 10 進数に変換

$G = 111001110$

モード	通常	反転	通常	反転	反転	反転	通常	反転	通常
G	1	1	1	0	0	1	1	1	0
B	1	0	1	1	1	0	1	0	0

$B = 101110100$

B	101	110	100
O	5	6	4

$O = 564$

O			5		6		4
			0		40		368
		$\nearrow$	$\downarrow$	$\nearrow$	$\downarrow$	$\nearrow$	$\downarrow$
D	0		5		46		372

($\nearrow$ は左下 $\times 8$, $\downarrow$ は上 2 つの和)

$D = 372$

1.4　10 進数を 2 進グレイコードに変換する手順

1.4.1　10 進数 $D \Rightarrow$ 8 進数 O

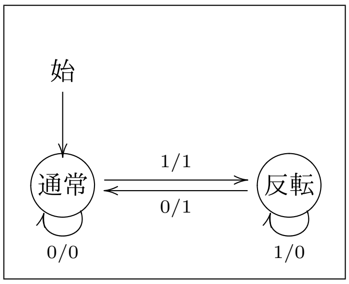
D を 8 で割った商と余りを求める．
商を新しい D として繰り返す．
商が 0 になったら，それまで求めた余りを逆順に並べると O が得られる．

1.4.2　8 進数 $O \Rightarrow$ 2 進数 B

O の各桁 (0〜7) を 2 進数 (000〜111) に置き換えると B が得られる．

1.4.3　2 進数 $B \Rightarrow$ グレイコード G

「通常モード」と「反転モード」の 2 つのモードを考える．
通常モードで始めて，2 進数 B を左から 1 桁ずつ読んで行く．



(1)　通常モードのとき，
読んだ数字が 0 ならば，0 を書く．通常モードのまま．
読んだ数字が 1 ならば，1 を書く．反転モードに変わる．

(2)　反転モードのとき，
読んだ数字が 0 ならば，1 を書く．通常モードに変わる．
読んだ数字が 1 ならば，0 を書く．反転モードのまま．

B を読み終わったとき，書き並べた数字 (0,1) の列が G である．

例 2　10 進数 456 をグレイコードに変換

$D = 456$

$$\begin{array}{rr@{\quad}l}
8 & \underline{)456} & \cdots\quad 0 \\
8 & \underline{)\ \ 57} & \cdots\quad 1 \\
8 & \underline{)\ \ \ \ 7} & \cdots\quad 7 \\
 & 0 &
\end{array}$$

$O = 710$

O	7	1	0
B	111	001	000

$B = 111001000$

	通常	反転	反転	反転	通常	通常	反転	通常	通常
B	1	1	1	0	0	1	0	0	0
G	1	0	0	1	0	1	1	0	0

$G = 100101100$

問題 3　110111100 の状態から始めるとする。

(1) グレイコード 110111100 を 10 進数に変換しなさい。

(2) 完全に外すのに何手かかるか。
そのとき，第 1 手は P，Q どちらか。

(3) 全部の環をはめる（111111111）のには何手かかるか。
そのとき，第 1 手は P，Q どちらか。

解答 **3**

(1) $G = 110111001$

	通常	反転	通常	通常	反転	通常	反転	反転	反転
G	1	1	0	1	1	1	0	0	1
B	1	0	0	1	0	1	1	1	0

$B = 100101110$

B	100	101	110
O	4	5	6

$O = 456$

O		4	5	6
		0	32	296
D	0	4	37	302

$D = 302$

(2) 302 手ですべての環を外すことができる．

第 1 手を P とすると，状態は $G' = 110111000$ に変わる．

	通常	反転	通常	通常	反転	通常	反転	反転	反転
G'	1	1	0	1	1	1	0	0	0
B'	1	0	0	1	0	1	1	1	1

$B' = 100101111 > 100101110$

これは，逆方向に進むから，第 1 手は Q である．

(3) $G" = 111111111$ を 10 進に変換する．

	通常	反転	通常	反転	反転	通常	反転	通常	反転
$G"$	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$B"$	1	0	1	0	1	0	1	0	1

$B" = 101010101$

$B"$	101	010	101
$O"$	5	2	5

$O" = 525$

$O"$		5	2	5
		0	40	336
$D"$	0	5	42	341

$D" = 341$

ゆえに，$341 - 302 = 39$ 手かかる．

第 1 手は P である．