

1 ルービックキューブ

1.1 目的

2×2×2のルービックキューブを完成するわかりやすい手順を見つけることが目的です。
基本操作は次の3つの回転だけです。

- (1) 前面回転(前) 前面を90° 時計回りに回転する
- (2) 右面回転(右) 右面を90° 時計回りに回転する
- (3) 上面回転(上) 上面を90° 時計回りに回転する

この3つの基本操作を組み合わせた合成操作の繰り返し(反復操作)で、2つまたは3つの小キューブだけが変化する次の基本変換を見つけます。

- (1) 2個交換(Exchange)
隣り合った2つの小キューブの位置を交換する(他の6つは位置も向きも元のまま)。
- (2) 3個回転(Rotation)
同一面内の3つの小キューブの向きを回転させる(他の5つは位置も向きも元のまま)。

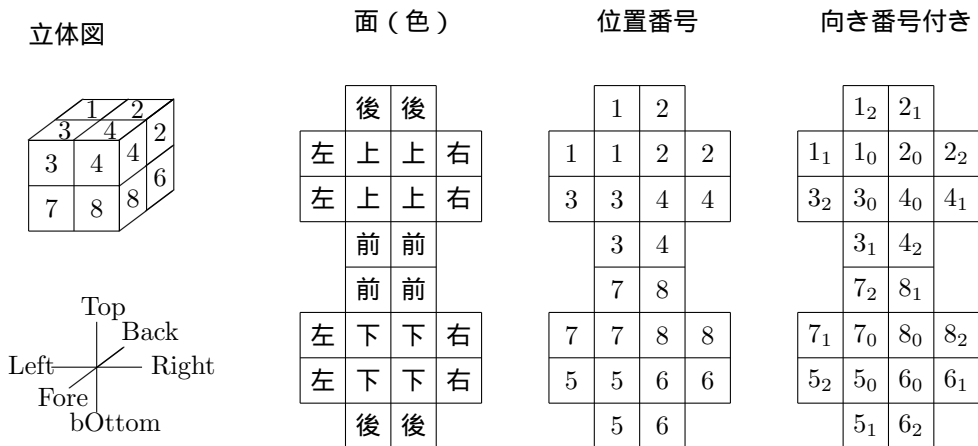
1.2 表現方法

1.2.1 位置

下に立体図と展開図を示します。展開図は通常とは違って、上段と下段の境界線で切り開いたものです。漢字で面(の色)を示しています。面(の色)は英語を略したアルファベットで示すこともあります。

1~8の大きな数字は小キューブの位置を示す位置番号です。

位置番号の右下についた小さい数字は、向きを表すための向き番号です。上段にあるキューブは上面から、下段にあるキューブは下面から時計回りに0,1,2とします。

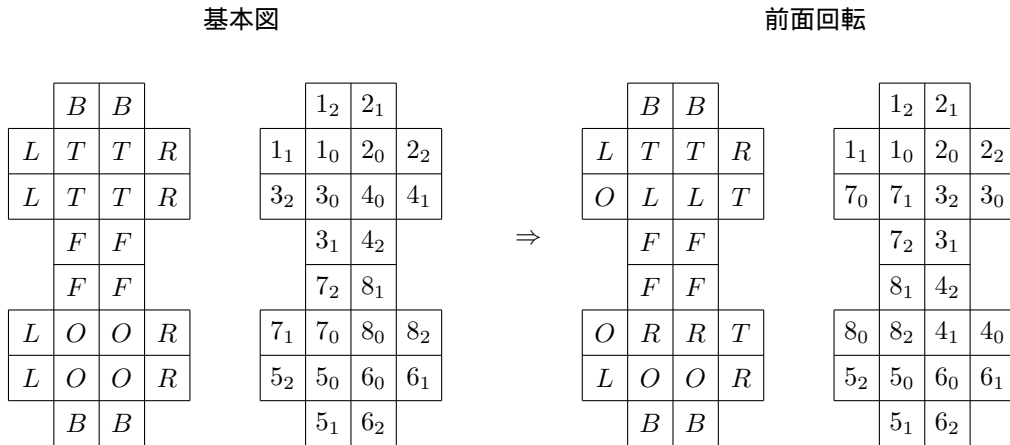


前=Fore, 後=Back, 左=Left, 右=Right, 上=Top, 下=bOttom

1.3 基本操作

1つの面を時計回りに90°回転する操作を基本操作と言います。

例 1.1 前面回転



位置番号3にあったキューブが番号が4の位置に移動すると共に、その向き番号0,1,2がそれぞれ1,2,0の向きに移動します。すなわち、向き番号が+1されます(2+1=0のように和を3で割った余りで考えます)。このことを $3 \xrightarrow{1} 4$ のように表します。他のキューブも同様に表されます。

$$3 \xrightarrow{1} 4, 4 \xrightarrow{2} 8, 8 \xrightarrow{1} 7, 7 \xrightarrow{2} 3$$

まとめて

$$3 \xrightarrow{1} 4 \xrightarrow{2} 8 \xrightarrow{1} 7 \xrightarrow{2} 3$$

と書くことにします。変化しないキューブも含めて、次のように表した図を遷移図と言います。

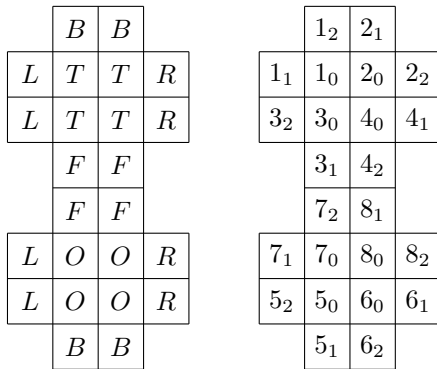
前面回転 $3 \xrightarrow{1} 4 \xrightarrow{2} 8 \xrightarrow{1} 7 \xrightarrow{2} 3, 1 \xrightarrow{0} 1, 2 \xrightarrow{0} 2, 5 \xrightarrow{0} 5, 6 \xrightarrow{0} 6$

問題 1.1 次の2つの基本操作について、回転後の図を示し、遷移図を求めなさい。

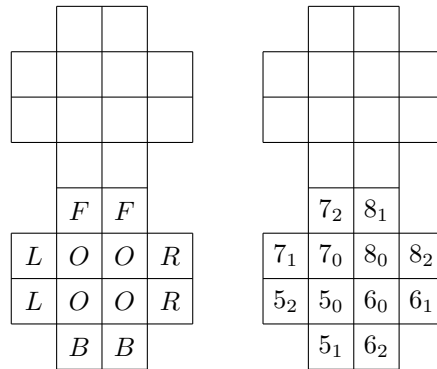
[ヒント] 色の図で、変化しない色(前面回転なら F)をまず入れると容易にできます。

上面回転

基本図

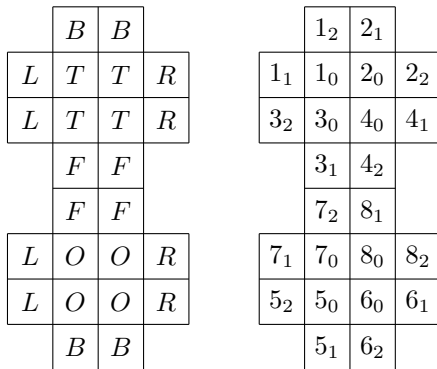


上面回転

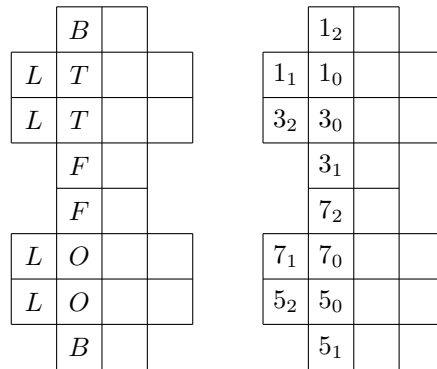


右面回転

基本図



右面回転



遷移図

前面回転 $3 \xrightarrow{1} 4 \xrightarrow{2} 8 \xrightarrow{1} 7 \xrightarrow{2} 3, 1 \xrightarrow{0} 1, 2 \xrightarrow{0} 2, 5 \xrightarrow{0} 5, 6 \xrightarrow{0} 6$

上面回転

右面回転

1.4 合成操作

前面回転をしてから右面回転をする操作を [前右] というように表します。

問題 1.2 次の操作を遷移図で表しなさい。

[ヒント] もう実際のキューブや展開図は必要ありません。遷移図で考える方が楽です。

[ヒント] 向きを増分の総和は必ず 3 の倍数になります。

[前右]

[前右上]

[前上]

[前上右]

1.5 反復操作

合成操作 [前右] を k 回繰り返すことを [前右] ^{k} というように表します。

[前右上] ^{m} と [前上右] ^{n} の中に (適切な m, n について), 目的の節で紹介した 2 つの基本変換 2 個交換 (Exchange) と 3 個回転 (Rotation) があります。

問題 1.3 基本変換となる [前右上] ^{m} と [前上右] ^{n} を見つけ, その遷移図と変換名を書きなさい。2 個交換については, どの 2 個が交換されるか, 3 個回転 についてはどの 3 個がどのように回転するかも書きなさい。

[ヒント] ある操作の遷移図のひとつの環に k 個のキューブがあるとき, その操作を k 回繰り返すと, その環の中のキューブはみな元の位置に戻ります。向きは矢印についている数の和 (を 3 で割った余り) になります。

[前右上] ^{m} ($m =$)

遷移図

変換名

[前上右] ^{n} ($n =$)

遷移図

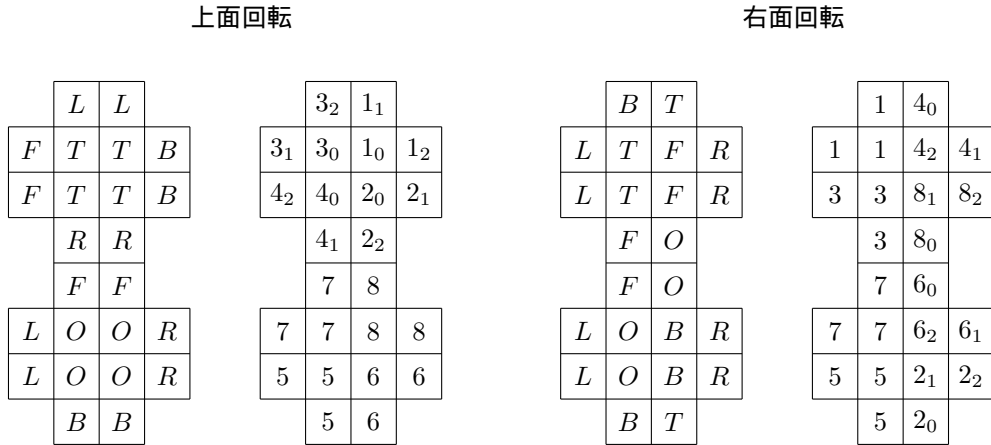
変換名

注 1.1 [右後上] ^{m} , [後左上] ^{m} , [左前上] ^{m} と [右上後] ^{n} , [後上左] ^{n} , [左上前] ^{n} も同様です。

たとえば, [右後上] ^{m} は実際には, 右面が手前に来るように持ち変えて [前右上] ^{m} をします。

1.6 解答 1

問題 1.1 他の 2 つの基本操作について，変化を図示し，遷移図を求めなさい。



前面回転 $3 \xrightarrow{1} 4 \xrightarrow{2} 8 \xrightarrow{1} 7 \xrightarrow{2} 3, 1 \xrightarrow{0} 1, 2 \xrightarrow{0} 2, 5 \xrightarrow{0} 5, 6 \xrightarrow{0} 6$

上面回転 $1 \xrightarrow{0} 2 \xrightarrow{0} 4 \xrightarrow{0} 3 \xrightarrow{0} 1, 5 \xrightarrow{0} 5, 6 \xrightarrow{0} 6, 7 \xrightarrow{0} 7, 8 \xrightarrow{0} 8$

右面回転 $2 \xrightarrow{2} 6 \xrightarrow{1} 8 \xrightarrow{2} 4 \xrightarrow{1} 2, 1 \xrightarrow{0} 1, 3 \xrightarrow{0} 3, 5 \xrightarrow{0} 5, 7 \xrightarrow{0} 7$

問題 1.2 次の操作を遷移図で表しなさい。

[前右] $2 \xrightarrow{2} 6 \xrightarrow{1} 8 \xrightarrow{1} 7 \xrightarrow{2} 3 \xrightarrow{2} 2, 4 \xrightarrow{1} 4, 1 \xrightarrow{0} 1, 5 \xrightarrow{0} 5$

[前上] $1 \xrightarrow{0} 2 \xrightarrow{0} 4 \xrightarrow{2} 8 \xrightarrow{1} 7 \xrightarrow{2} 1, 3 \xrightarrow{1} 3, 5 \xrightarrow{0} 5, 6 \xrightarrow{0} 6$

[前右上] $1 \xrightarrow{0} 2 \xrightarrow{2} 6 \xrightarrow{1} 8 \xrightarrow{1} 7 \xrightarrow{2} 1, 3 \xrightarrow{2} 4 \xrightarrow{1} 3, 5 \xrightarrow{0} 5$

[前上右] $1 \xrightarrow{2} 6 \xrightarrow{1} 8 \xrightarrow{1} 7 \xrightarrow{2} 1, 2 \xrightarrow{1} 2, 3 \xrightarrow{1} 3, 4 \xrightarrow{1} 4, 5 \xrightarrow{0} 5$

問題 1.3 基本変換となる [前右上]^m と [前上右]ⁿ を見つけ，その遷移図と変換名を書きなさい。
2 個交換については，どの 2 個が交換されるか，3 個回転についてはどの 3 個がどのように回転するかも書きなさい。

[前右上]^m ($m = 5$)

遷移図 $3 \xrightarrow{2} 4 \xrightarrow{1} 3, 1 \xrightarrow{0} 1, 2 \xrightarrow{0} 2, 5 \xrightarrow{0} 5, 6 \xrightarrow{0} 6, 7 \xrightarrow{0} 7, 8 \xrightarrow{0} 8$

変換名 2 個交換 (Exchange)，上段手前の 2 つのキューブ (3,4 番) を交換する。

[前上右]ⁿ ($n = 4$)

遷移図 $2 \xrightarrow{1} 2, 3 \xrightarrow{1} 3, 4 \xrightarrow{1} 4, 1 \xrightarrow{0} 1, 5 \xrightarrow{0} 5, 6 \xrightarrow{0} 6, 7 \xrightarrow{0} 7, 8 \xrightarrow{0} 8$

変換名 3 個回転 (Rotation)，上段手前と右の 3 つ (2,3,4 番) の向きが +1 される。

1.7 完成手順

次のようにして完成させることができます。

- (step1) 一段揃える（これを下段とする）。
- (step2) 2個交換 (Exchange) を何回か行なって、すべての位置を合わせる。
- (step3) 3個回転 (Rotation) を何回か行なって、すべての向きを合わせる。

注 1.2

- (step1) 一面揃っても、横が揃っていないと、一段揃えたことになりません。
他の4つのキューブはどうなってもよいので、基本変換を使うまでもないでしょう。
- (step2) (Exchange) を高々2回（と上面だけの回転を）行うだけでできます。
- (step3) (Rotation) を高々3回（と上面だけの回転を）行うだけでできます。

問題 1.4 次の展開図は、(step1) が終わったところです（下段は省略）。(step2) の手順を示しなさい。

[ヒント] キューブの番号を書いて考える。

(1)

	<i>L</i>	<i>F</i>	
<i>T</i>	<i>B</i>	<i>R</i>	<i>T</i>
<i>T</i>	<i>B</i>	<i>L</i>	<i>T</i>
	<i>R</i>	<i>F</i>	

(2)

	<i>R</i>	<i>T</i>	
<i>T</i>	<i>F</i>	<i>R</i>	<i>B</i>
<i>L</i>	<i>T</i>	<i>B</i>	<i>T</i>
	<i>F</i>	<i>L</i>	

問題 1.5 次の展開図は、(step2) が終わったところです（下段は省略）。(step3) の手順を示しなさい。

[ヒント] 向き番号を書いて考える。

(1)

	<i>L</i>	<i>B</i>	
<i>T</i>	<i>B</i>	<i>T</i>	<i>R</i>
<i>L</i>	<i>T</i>	<i>R</i>	<i>F</i>
	<i>F</i>	<i>T</i>	

(2)

	<i>L</i>	<i>R</i>	
<i>T</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>T</i>
<i>F</i>	<i>L</i>	<i>R</i>	<i>F</i>
	<i>T</i>	<i>T</i>	

1.8 解答 2

問題 1.4 次の展開図は, (step1) が終わったところです。(step2) の手順を示しなさい。

(1)

	L	F		
T	B	R	T	
T	B	L	T	
	R	F		

(2)

	R	T		
T	F	R	B	
L	T	B	T	
	F	L		

(1)

	1	4		
1	1	4	4	
2	2	3	3	
	2	3		

 $= [\text{前右上}]^4 \Rightarrow$

	1	4		
1	1	4	4	
3	3	2	2	
	3	2		

 $= [\text{右上後}]^4 \Rightarrow$

	1	2		
1	1	2	2	
3	3	4	4	
	3	4		

(2)

	4	2		
4	4	2	2	
3	3	1	1	
	3	1		

 $= [\text{左上前}]^4 \Rightarrow$

	3	2		
3	3	2	2	
4	4	1	1	
	4	1		

 $= [\text{右上後}]^4 \Rightarrow$

	3	1		
3	3	1	1	
4	4	2	2	
	4	2		

 $= [\text{上}]^{-1} \Rightarrow$

	1	2		
1	1	2	2	
3	3	4	4	
	3	4		

問題 1.5 次の展開図は, (step2) が終わったところです。(step3) の手順を示しなさい。

(1)

	L	B		
T	B	T	R	
L	T	R	F	
	F	T		

(2)

	L	R		
T	B	B	T	
F	L	R	F	
	T	T		

(1)

	1	1		
0	2	0	2	
2	0	1	2	
	1	0		

 $= [\text{後上左}]^5 \Rightarrow$

	2	2		
1	0	1	0	
0	1	1	2	
	2	0		

 $= [\text{前上右}]^{10} \Rightarrow$

	2	1		
1	0	0	2	
2	0	0	1	
	1	2		

(2)

	1	2		
0	2	1	0	
1	2	1	2	
	0	0		

 $= [\text{右上後}]^5 \Rightarrow$

	2	0		
1	0	2	1	
1	2	2	0	
	0	1		

 $= [\text{前上右}]^5 \Rightarrow$

	2	1		
1	0	0	2	
2	0	0	1	
	1	2		

1.9 発展

問題 1.6 $[\text{前上右}]^k$ もある k について基本変換になります。そのような k の値と, どんな基本変換か述べなさい。