1　差分四項パズル

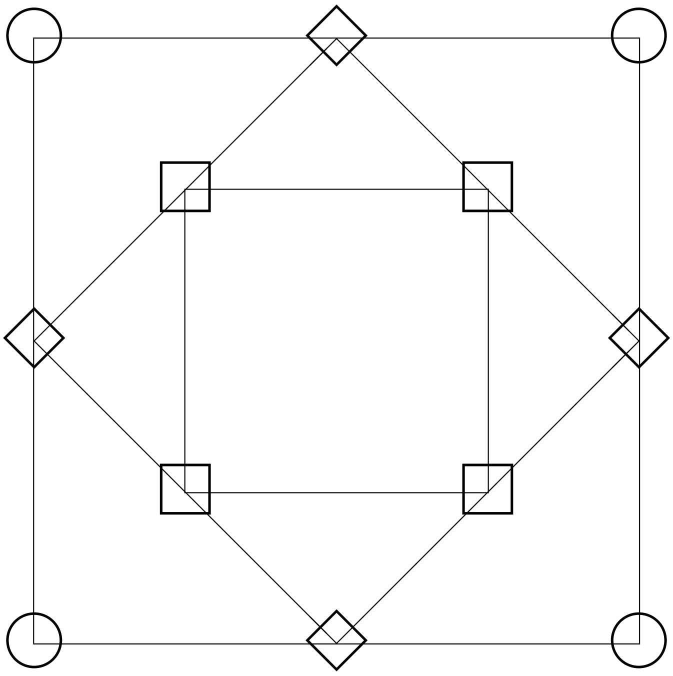
1.1　元になった遊び

(1)　大きな正方形の頂点の位置（下図の○の中）に 4 つの整数を書く。

(2)　正方形の各辺の中央（下図の◇の中）に、その辺の両端に書かれた 2 つの数の差の絶対値を書く。

(3)　新しい 4 つの数が少し小さい正方形状になっているので，この正方形についてまた (2) を行う（数の□）。

(4)　この操作を繰り返すとどうなるか。ある法則がみつかるまで繰り返しなさい。



1.2　コンパクトな書き方

このままでは，非常に大きな正方形から始めないと，繰り返しをたくさんできないので，次のように書き方を改める。

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ d_1 & c_1 \end{matrix} \to \begin{matrix} a_2 & b_2 \\ d_2 & c_2 \end{matrix} \to \begin{matrix} a_3 & b_3 \\ d_3 & c_3 \end{matrix} \to \cdots \left(\text{ただし} \begin{matrix} a_{k+1} = |a_k - d_k| & b_{k+1} = |a_k - b_k| \\ d_{k+1} = |c_k - d_k| & c_{k+1} = |b_k - c_k| \end{matrix} \right)$$

例 1

$$\begin{matrix} 35 & 16 \\ 3 & 7 \end{matrix} \to \begin{matrix} 32 & 19 \\ 4 & 9 \end{matrix} \to \begin{matrix} 28 & 13 \\ 5 & 10 \end{matrix} \to \begin{matrix} 23 & 15 \\ 5 & 3 \end{matrix} \to \begin{matrix} 18 & 8 \\ 2 & 12 \end{matrix} \to \begin{matrix} 16 & 10 \\ 10 & 4 \end{matrix} \to \cdots$$

この書き方で試しなさい。

1.3　推測

どんな数から始めても，いつか「オール０」になるらしい。

問題 1 大小関係で分類すると，下記の 10 パターンに分かれる。ただし，回転したり，裏返したりして同じになるものは同一視する。(1)〜(9) の各パターンについて，何回でオール０になるか調べなさい。

(i) 同じ数がある場合

(1) $\begin{matrix} a & a \\ a & a \end{matrix}$　　(2) $\begin{matrix} a & b \\ b & a \end{matrix}$　　(3) $\begin{matrix} a & b \\ a & b \end{matrix}$

(4) $\begin{matrix} a & b \\ b & b \end{matrix}$　　(5) $\begin{matrix} a & b \\ b & c \end{matrix}$

(6) $\begin{matrix} a & b \\ a & c \end{matrix}$ $(b > a > c)$　　(7) $\begin{matrix} a & b \\ a & c \end{matrix}$ $(a > b > c)$

(ii) すべて異なる場合

(8) $\begin{matrix} a & b \\ d & c \end{matrix}$ $(a > c > b > d)$　　(9) $\begin{matrix} a & b \\ d & c \end{matrix}$ $(a > b > d > c)$　　(10) $\begin{matrix} a & b \\ d & c \end{matrix}$ $(a > b > c > d)$

問題 1 で調べた結果，(1)〜(9) のパターンは高々数回でオール０になることがわかる。したがって，もしオール０にならない状態があるとすると，それは (10) の形をしていて，(10) と同一視される形を永遠に繰り返すことになる。

1.4　証明

問題 2 どんな状態もいつか必ずオール０になること，すなわち (10) の形を永遠に繰り返すことはないこと，を示しなさい。

1.5　パズル

問題 3 オール０になるまでに 13 回以上かかる状態をみつけなさい。

問題 4 3 桁以下の 4 つの数からなる状態で, オール０になるまでに最も回数がかかるものを求めなさい。何回でオール０になるか。