質問

0 と 1 だけで作られた無限数列で、どんな連続した 3 つの部分数列を取っても同一でない数列は作れるか？ 部分数列の項数や第何項を起点とするかは問いません．

なぜこんなことを聞くかと言うと、将棋の従来のルールであった「同一手順を 3 回繰り返すと千日手」を回避することができるのではないか気になっただけです．

回答

$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \cdots$ を 2 進法で書きます．

$$0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, \cdots$$

その 1 の個数が偶数なら 0，奇数なら 1 とします．

$$0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, \cdots$$

これが条件を満たす数列です．

証明

$a_n = n$ を 2 進法で表したときの 1 の個数を 2 で割った余り

$A[m\sim n] = a_m a_{m+1} \cdots a_n$ (a_mから a_nまで $n-m+1$ 個の $0, 1$ の列)

$S_m = A[0\sim 2^m - 1]$

$\overline{S_m} = S_m$の補数 (0 と 1 を逆にした列)

とする．

$$\begin{array}{rl}
a_0 = 0 & S_0 = 0 \\
a_1 = 1 & S_1 = 01 \\
a_2 a_3 = 10 & S_2 = 0110 \\
A[4\sim 7] = 1001 & S_3 = 01101001 \\
A[8\sim 15] = 10010110 & S_4 = 0110100110010110 \\
A[16\sim 31] = 1001011001101001 & S_5 = 01101001100101101001011001101001 \\
 & \vdots
\end{array}$$

つぎのような特徴がある．

【1】$S_{m+1} = S_m \overline{S_m}$

【2】$S_{m+1} = S_m$の 0 を 01 で, 1 を 10 で置き換えたもの

【3】$a_0 a_1, a_2 a_3, \cdots, a_{2k} a_{2k+1}, \cdots$ は 01 または 10 である．

【4】00, 11 は, $a_1 a_2$, $a_5 a_6$ のように, $a_{2k-1} a_{2k}$に限る．

背理法の仮定　同じ文字列が 3 つ連続して現れるとし，そのような文字列の最初の（最も左にある）ものを

$$A[n\sim n+k-1] A[n+k\sim n+2k-1] A[n+2k\sim n+3k-1]$$

とし，S_m の部分列であるとする．

(1) $k=1,2$ ではない．

(2) $k=3$ のとき

001 001 001

010 010 010

011 011 011

110 110 110

101 101 101

100 100 100

が考えられるが，00 または 11 が含まれ,【4】に反する．

(3) k が奇数 $\geqq 5$ のとき
同様に，文字列に 00 または 11 が含まれ,【4】に反する．

(4) k が偶数 $\geqq 4$ のとき

(i) n が偶数のとき
【2】より，

$$A\left[\frac{n}{2}\sim\frac{n+k}{2}-1\right]=A\left[\frac{n+k}{2}\sim\frac{n+2k}{2}-1\right]=A\left[\frac{n+2k}{2}\sim\frac{n+3k}{2}-1\right]$$

S_{m-1} に，長さが $\dfrac{k}{2}$ の文字列が 3 連続しているので, 最初という仮定に反する．

(ii) n が奇数のとき
【4】より，$a_{n-1}a_n$, $a_{n+k-1}a_{n+k}$, $a_{n+2k-1}a_{n+2k}$ がすべて 01 または 10 である．
$a_n=a_{n+k}=a_{n+2k}$ だから，すべて 01 または，すべて 10 である．ゆえに

$$A[n-1\sim n+k-2]=A[n+k-1\sim n+2k-2]=A[n+2k-1\sim n+3k-2]$$

やはり，最初という仮定に反する．

すべての可能性が否定されたので，3 連続文字列はない．