

1 シャッフル

1.1 参考 (入試問題より)

東京大学 (理科) 平成 14 年度前期 問題 6

N を正の整数とする。 $2N$ 個の項からなる数列

$$\{a_1, a_2, \dots, a_N, b_1, b_2, \dots, b_N\}$$

を

$$\{b_1, a_1, b_2, a_2, \dots, b_N, a_N\}$$

という数列に並べ替える操作を「シャッフル」と呼ぶことにする。並べ替えた数列は b_1 を初項とし、 b_i の次に a_i 、 a_i の次に b_{i+1} が来るようなものになる。また、数列 $\{1, 2, \dots, 2N\}$ をシャッフルしたときに得られる数列において、数 k が現れる位置を $f(k)$ で表す。

たとえば、 $N = 3$ のとき、 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ をシャッフルすると $\{4, 1, 5, 2, 6, 3\}$ となるので、

$$f(1) = 1, f(2) = 4, f(3) = 6, f(4) = 1, f(5) = 3, f(6) = 5$$

である。

1. 数列 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ を 3 回シャッフルしたときに得られる数列を求めよ。
2. $1 \leq k \leq 2N$ を満たす任意の整数 k に対し、 $f(k) - 2k$ は $2N + 1$ で割り切れることを示せ。
3. n を正の整数とし、 $N = 2^{n-1}$ のときを考える。数列 $\{1, 2, 3, \dots, 2N\}$ を $2n$ 回シャッフルすると、 $\{1, 2, 3, \dots, 2N\}$ に戻ることを証明せよ。

1.2 問題提起

トランプの札を混ぜ合わせることをシャッフル (shuffle) と言う。

52 枚の札をちょうど半分に分けて、正確に 1 枚ずつ混ぜ合わせるシャッフルを考える。そのようなシャッフルには、Out shuffle と In shuffle の 2 通りある。

定義 1 (Out shuffle と In shuffle)

OutShuffle	before	1	2	3	4	...	25	26	27	28	...	49	50	51	52
	after	1	27	2	28	25	51	26	52
InShuffle	before	1	2	3	4	...	25	26	27	28	...	49	50	51	52
	after	27	1	28	2	51	25	52	26

(main problem) 同じ Shuffle を繰り返し行くと、いつか最初と同じ状態に戻るが、Out shuffle, In shuffle それぞれ何回繰り返すと最初の状態に戻るか。

注 1 Out shuffle では一番外側の 2 枚の札は移動しないでそのまま外側にある。この 2 枚の札を除いて、残りの 50 枚について見ると In shuffle になっている。ゆえに、一般に 偶数枚の札の In shuffle について調べればよい。

定義 2 (関数 f_N) $2N$ 枚の札の In shuffle を 1 回行ったとき、 k 番目の札が移る先を $f_N(k)$ 番目とする。たとえば

k	1	2	...	25	26	27	28	...	51	52
$f_{26}(k)$	2	4	...	50	52	1	3	...	49	51

定義 3 (演算子 mod) m を n で割った余りを $m \bmod n$ で表す。たとえば、

$$47 \bmod 10 = 7, 10 \bmod 7 = 3$$

問題 1 $f_{26}(k)$ を (場合分けしないで) k の 1 つの式で表しなさい。

問題 2 一般に $f_N(k)$ を k の 1 つの式で表しなさい。

問題 3 20 枚 ($N = 10$) の札を In Shuffle するとき、それぞれの札が何回で元に戻るか調べなさい。また、すべての札が同時に元に戻るのは何回目か。

問題 4 $f_N^m(k) = \underbrace{f_N(f_N(\cdots f_N(k)\cdots))}_{m \text{ 回}}$ を求めなさい。

問題 5 In shuffle を何回か行って 1 番目の札が元に戻ったとする。このとき、すべての札が元に戻っていることを示しなさい。

問題 6 (main problem) を解きなさい。すなわち、トランプの札 52 枚の場合、In Shuffle, Out shuffle それぞれ何回で最初の状態に戻るか。

問題 7 $2N$ 枚の札の In Shuffle の場合、高々 $2N$ 回ですべての札が元に戻ることを示しなさい。

問題 8 2^n 枚の札の In Shuffle の場合、ちょうど $2n$ 回ですべての札が元に戻ることを示しなさい。