1.3　解答

問題 1　$f_{26}(k)$ を（場合分けしないで）k の 1 つの式で表しなさい。

$$
\begin{aligned}
f_{26}(k) &= \begin{cases} 2k & (1 \leqq k \leqq 26) \\ 2k-53 & (27 \leqq k \leqq 52) \end{cases} \\
&= 2k \bmod 53
\end{aligned}
$$

問題 2　一般に $f_N(k)$ を k の 1 つの式で表しなさい。

$$f_N(k) = 2k \bmod (2N+1)$$

問題 3　20 枚（$N=10$）の札を In Shuffle するとき，それぞれの札が何回で元に戻るか調べなさい。また，すべての札が同時に元に戻るのは何回目か。

$$k \to f_{10}(k) = 2k \bmod 21$$

を元に戻るまで繰り返す。

$$
\begin{array}{ccccccccccccccl}
1 & \to & 2 & \to & 4 & \to & 8 & \to & 16 & \to & 11 & \to & 1 & & \cdots 6\text{ 回} \\
3 & \to & 6 & \to & 12 & \to & 3 & & & & & & & & \cdots 3\text{ 回} \\
5 & \to & 10 & \to & 20 & \to & 19 & \to & 17 & \to & 13 & \to & 5 & & \cdots 6\text{ 回} \\
7 & \to & 14 & \to & 7 & & & & & & & & & & \cdots 2\text{ 回} \\
9 & \to & 18 & \to & 15 & \to & 9 & & & & & & & & \cdots 3\text{ 回}
\end{array}
$$

すべての札が元に戻るのは，

$$\{6,3,6,2,3\} \text{ の最小公倍数} = 6 \text{ 回}$$

問題 4　$f_N{}^m(k) = \underbrace{f_N(f_N(\cdots f_N}_{m\text{ 回}}(k)\cdots))$ を求めなさい。

$$
\begin{aligned}
&p \bmod M = r \text{ のとき} \\
&p = qM + r \text{ とおくと} \\
&2p = 2(qM+r) = 2qM + 2r \\
&\therefore\ 2p \bmod M = 2r \bmod M
\end{aligned}
$$

ゆえに

$$
\begin{aligned}
f_N{}^1(k) &= 2k \bmod (2N+1) \\
f_N{}^2(k) &= 2\underbrace{f_N(k)}_{r} \bmod \underbrace{(2N+1)}_{M} = 2\cdot\underbrace{2k}_{p} \bmod \underbrace{(2N+1)}_{M} = 2^2k \bmod (2N+1) \\
f_N{}^3(k) &= 2\underbrace{f_N{}^2(k)}_{r} \bmod \underbrace{(2N+1)}_{M} = 2\cdot\underbrace{2^2k}_{p} \bmod \underbrace{(2N+1)}_{M} = 2^3k \bmod (2N+1) \\
&\ \vdots \\
f_N{}^m(k) &= 2^mk \bmod (2N+1)
\end{aligned}
$$

問題 5 In shuffle を何回か行って 1 番目の札が元に戻ったとする。このとき，すべての札が元に戻っていることを示しなさい。

1 番目の札が m 回目に 1 番目に戻ったとすると

$$f_N{}^m(1) = 1$$
$$\therefore\ 2^m \bmod (2N+1) = 1$$

このとき，k 番目の札はどこにあるか

$$f_N{}^m(k) = 2^m k \bmod (2N+1) = 1k \bmod (2N+1) = k$$

すなわち，元に戻っている

注 1 m 回ですべての札が元に戻る $\iff$ m 回で 1 番目の札が元に戻る

問題 6 (main problem) を解きなさい。すなわち，トランプの札 52 枚の場合，In Shuffle , Out shuffle それぞれ何回で最初の状態に戻るか。

In shuffle の場合

$$f_{26}(k) = 2k \bmod 53$$

$$\begin{array}{l} 1 \to 2 \to 4 \to 8 \to 16 \to 32 \to 11 \to 22 \to 44 \to 35 \to 17 \to 34 \to 15 \to 30 \\ \to 7 \to 14 \to 28 \to 3 \to 6 \to 12 \to 24 \to 48 \to 43 \to 33 \to 13 \to 26 \to 52 \\ \to 51 \to 49 \to 45 \to 37 \to 21 \to 42 \to 31 \to 9 \to 18 \to 36 \to 19 \to 38 \to 23 \\ \to 46 \to 39 \to 25 \to 50 \to 47 \to 41 \to 29 \to 5 \to 10 \to 20 \to 40 \to 27 \to 1 \end{array}$$

52 回で元に戻る

Out shuffle の場合，50 枚の In shuffle と同じ

$$f_{25}(k) = 2k \bmod 51$$

$$1 \to 2 \to 4 \to 8 \to 16 \to 32 \to 13 \to 26 \to 1$$

8 回で元に戻る

問題 7 $2N$ 枚の札の In Shuffle の場合，高々 $2N$ 回ですべての札が元に戻ることを示しなさい。

トランプの Inshuffle のように, 1 番目の札がすべての位置を通る場合が，最長で $2N$ 回かかる

問題 8 2^n 枚の札の In Shuffle の場合，$2n$ 回ですべての札が元に戻ることを示しなさい。

$$f_{2^{n-1}}(k) = 2k \bmod (2^n+1)$$

$2^n + 1 - p$ を $-p$ と書くことにする

$$\begin{array}{l} 1 \to 2 \to 4 \to \cdots \to 2^n \equiv -1 \\ \to -2 \to -4 \to \cdots \to -2^n \equiv 1 \end{array}$$

$2n$ 回で元に戻る