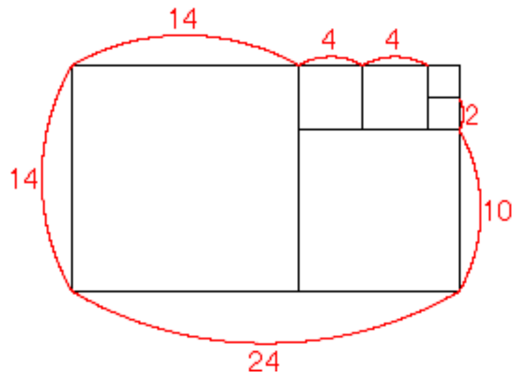
1　互除法を用いた無理数の証明

1.1　互除法の視覚化

ユークリッドの互除法を図で表すと次の例のようになる。

例　14 と 24 の最大公約数を求める



ゆえに最大公約数は 2 である。

一般に m と n の最大公約数を求める手順は次の通りである。

(1)　$m \times n$ の長方形をかく。

(2)　長方形から，短辺を一辺とする正方形を除く。

(3)　その結果，正方形が残ったら，終了する。

(4)　正方形でない場合，(2) に戻って繰り返す。

(5)　(3) で終了したとき，残った正方形の辺の長さが，m と n の最大公約数である。

上の例の図は，7×12 の長方形から始めても同じ図になる。そればかりでなく，$1 \times \dfrac{12}{7}$ の長方形から始めても同じである。

任意の長方形から始めて，上の手順 (2)〜(4) を繰り返すとき，

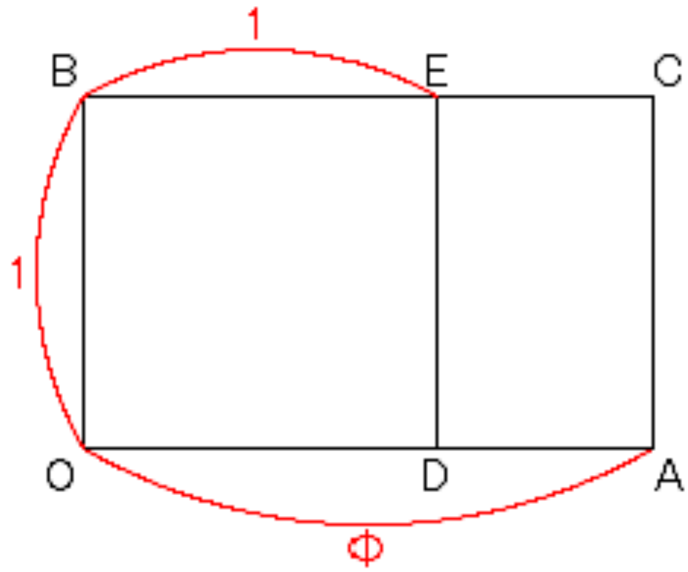
- 初めの長方形の縦と横の比が有理数なら，いつか正方形が残って終了する。
- 初めの長方形の縦と横の比が無理数なら，正方形が残ることはなく永遠に続く。

1.2 黄金比

はがきやクレジットカードのように，縦 x と横 y の比が，$x:y=y-x:x$ を満たす長方形が最も美しい長方形とされ，この比 $\phi=\dfrac{y}{x}$ を黄金比という。

$$
\begin{aligned}
&1:\phi=\phi-1:1\\
&\phi^2-\phi-1=0\\
&\therefore\ \phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1.618\ldots\\
&\frac{1}{\phi}=\phi-1=0.618\ldots
\end{aligned}
$$

この長方形に先の手順 (2) を 1 回行う。



残った長方形 ACED は元の長方形 OACB と相似である。

したがって，手順 (2) を何回繰り返しても，初めの長方形と相似の長方形が残るので，正方形が残って終了とはならない。

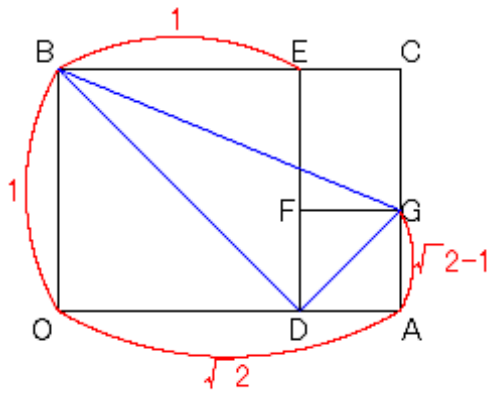
ゆえに，黄金比 ϕ は無理数である。

1.3 白銀比

コピー用紙は，半分に折ると，元の長方形と相似な長方形になる。すなわち，$x : y = \dfrac{y}{2} : x$ をみたす。この比 $r = \dfrac{y}{x}$ を白銀比という。

$$
\begin{aligned}
&x : y = \frac{y}{2} : x \\
&1 : r = \frac{r}{2} : 1 \\
&\frac{r^2}{2} = 1 \\
&\therefore\ r = \sqrt{2}
\end{aligned}
$$

この長方形に，先の手順 (2) を 2 回行う。



$$
\begin{aligned}
&\mathrm{BC} = \sqrt{2} = \mathrm{BD} \\
&\angle \mathrm{BCG} = 90^\circ = \angle \mathrm{BDG} \\
&\mathrm{BG} = \mathrm{BG} \\
&\therefore\ \triangle \mathrm{BCG} \equiv \triangle \mathrm{BDG} \\
&\therefore\ \mathrm{CG} = \mathrm{DG} \\
&\therefore\ \mathrm{CE} : \mathrm{CG} = 1 : \sqrt{2}
\end{aligned}
$$

よって，長方形 CGFE はもとの長方形 OACB と相似である。したがって，手順 (2) を何回繰り返しても，正方形が残ることはない。

ゆえに，白銀比 $\sqrt{2}$ は無理数である。