1　三山崩しの必勝法

1.1　三山崩しのルール

小石がいくつか三つの山に分けて積んである。二人のプレイヤーが交互に石を取り去っていく。一度に二つ以上の山から取ることはできない。一つの山からなら何個取ってもよい。最後に石を取ったプレイヤーを勝ちとする。

例 1　三つの山の石の個数がそれぞれ l 個, m 個, n 個 の状態を (l, m, n) で表すことにする。$(7, 5, 3)$ の状態から始めて，A,B 二人が次のように石を取っていったとする。

$$
\begin{aligned}
(7,5,3) \quad & \xrightarrow{\mathrm{A}} (4,5,3) \xrightarrow{\mathrm{B}} (4,2,3) \\
& \xrightarrow{\mathrm{A}} (4,2,0) \xrightarrow{\mathrm{B}} (2,2,0) \\
& \xrightarrow{\mathrm{A}} (0,2,0) \xrightarrow{\mathrm{B}} (0,0,0)
\end{aligned}
$$

B が最後に取って終わったので B の勝ちである。

1.2　良形

例 1 のゲームで A に勝つチャンスはなかったのだろうか？

3 手目で $(4,2,3) \xrightarrow{\mathrm{A}} (4,2,0)$ としたのが失敗だった。一つの山から全部取って空にするのは，他の二つの山が同じ数のときに限るべきである。

$$
\begin{array}{llll}
(m,m,n) & \longrightarrow & (m,m,0) & :\text{同じ数の二つの山を残す} \\
 & \xrightarrow{\text{相手}} & (l,m,0) & :\underline{\text{どんな取り方をしても}}\text{同じ数にできない} \\
 & \xrightarrow{\text{自分}} & (l,l,0) & :\underline{\text{うまい取り方をすると}}\text{同じ数にできる} \\
 & \vdots & & \\
 & \xrightarrow{\text{自分}} & (0,0,0) & :\text{自分が勝つ}
\end{array}
$$

ポイント

- $(l,m,0),(l,0,m),(0,l,m)$ を残すと負ける $(l \neq m)$。
- $(m,m,0),(m,0,m),(0,m,m)$ を残すと勝てる。
- $(m,m,n),(m,n,m),(n,m,m)$ を残すと負ける $(n>0)$。

3 手目で $(4,2,3) \xrightarrow{\mathrm{A}} (1,2,3)$ としていたら勝つことができた。なぜなら，次に B がどんな取り方をしても，上述の “残すと負ける” 形になるからである。

ポイント

- $(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1)$ を残すと勝てる。

すべての “残すと勝てる” 形を知っていればゲームに勝つことができる。この形を**良形** (または**後手必勝形**) という。

1.3　良形の判定法

良形について，つぎの性質が容易にわかる。

- (l, m, n) が良形で $n' > n$ ならば，(l, m, n') は良形ではない。
- (l, m, n) が良形で $n' < n$ ならば，(l, m, n') は良形ではない。

すなわち，l, m に対して (l, m, n) が良形となる n が 1 つだけある。この n を $l \oplus m$ で表すことにする（$\oplus$ は オープラス または リングサム と読む)。

問題 1.1　下の表の l 行 m 列目のマスに $l \oplus m$ の値を書き入れなさい。完成した表を眺めて，そこに現れる規則性をしらべなさい。

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	0	3	2												
2	2	3	0	1												
3	3	2	1	0												
4	4															
5	5															
6	6															
7	7															
8	8															
9	9															
10	10															
11	11															
12	12															
13	13															
14	14															
15	15															

ポイント　$l \oplus m$ は $0 \oplus m$, $1 \oplus m$, $\ldots$, $(l-1) \oplus m$ および $l \oplus 0$, $l \oplus 1$, $\ldots$, $l \oplus (m-1)$ のどれとも異なる最小の n である。

すなわち，表のひとつのマスには，そのマスと同じ列の上にあるマスと，同じ行の左にあるマスに書いてある数のどれとも異なる最小の n を書けばよい。

完成した表 (最終ページ) を眺めていると，いくつかの規則性に気がつくが，次の性質が良形を判定するのに役立つ。

- 左上 ($0 \leqq l < 8,\ 0 \leqq m < 8$) と右下 ($8 \leqq l < 16,\ 8 \leqq m < 16$) の部分が同じ。
- 左下 ($8 \leqq l < 16,\ 0 \leqq m < 8$) と右上 ($0 \leqq l < 8,\ 8 \leqq m < 16$) の部分が同じ。
- 左上（右下）の部分にある数は，$0 \leqq n < 8$ の範囲にある。
- 左下（右上）の部分にある数は左上の対応する位置の数より 8 だけ大きい。

ポイント

$0 \leqq l < 8,\ 0 \leqq m < 8$ のとき，$0 \leqq l \oplus m < 8$ で，かつ

$$\begin{array}{ll}
(1) & (0+l) \oplus (0+m) = 0 + (l \oplus m) \\
(2) & (8+l) \oplus (0+m) = 8 + (l \oplus m) \\
(3) & (0+l) \oplus (8+m) = 8 + (l \oplus m) \\
(4) & (8+l) \oplus (8+m) = 0 + (l \oplus m)
\end{array}$$

この性質を 2 進法で表現する。

2 進法で 3 桁の数 $l = x_3x_2x_1, m = y_3y_2y_1$ に対する $l \oplus m$ を $n = z_3z_2z_1$ とすると，4 桁の数 $L = x_4x_3x_2x_1, M = y_4y_3y_2y_1$ に対する $N = L \oplus M$ は，つぎのようになる。

$$\begin{array}{ccllll}
 & & (1) & (2) & (3) & (4) \\
L & : & 0x_3x_2x_1 & 0x_3x_2x_1 & 1x_3x_2x_1 & 1x_3x_2x_1 \\
M & : & 0y_3y_2y_1 & 1y_3y_2y_1 & 0y_3y_2y_1 & 1y_3y_2y_1 \\
N & : & 0z_3z_2z_1 & 1z_3z_2z_1 & 1z_3z_2z_1 & 0z_3z_2z_1
\end{array}$$

すなわち，

$$z_4 = \begin{cases} 0 & (x_4, y_4 \text{の 1 の個数が偶数個}) \\ 1 & (x_4, y_4 \text{の 1 の個数が奇数個}) \end{cases}$$

同様の性質

$$z_k = \begin{cases} 0 & (x_k, y_k の 1 の個数が偶数個) \\ 1 & (x_k, y_k の 1 の個数が奇数個) \end{cases}$$

が，左上の 2×2 $(k=1), 4 \times 4$ $(k=2)$, 8×8 $(k=3)$ の部分にも見られる。また，表を拡張して，16×16 $(k=5), 32 \times 32$ $(k=6), \cdots$ を書いてしらべると，やはり同様の性質が見られる。

演算 $l \oplus m = n$ は 2 進法で，各桁ごとにつぎのように決まる。

l の k 桁目	0	0	1	1
m の k 桁目	0	1	0	1
n の k 桁目	0	1	1	0

問題 1.2　次の性質が成り立つことを示しなさい。

$l \oplus m = m \oplus l$

$(l \oplus m) \oplus n = l \oplus (m \oplus n)$　(単に $l \oplus m \oplus n$ と書くことにする)

$l \oplus m = n \iff l \oplus m \oplus n = 0$

定理 1.1　(l, m, n) が良形であるための必要十分条件

(l, m, n) が良形 $\iff l \oplus m \oplus n = 0 \iff l, m, n$ の各桁の 1 の個数が偶数個

1.4　必勝法

必勝法は良型を残すように石を取ることである。

例 1.1　$(l, m, n) = (12, 9, 5)$

$$
\begin{array}{r|l}
l & 1100 \\
m & 1001 \\
n & 0101 \\
\hline
l \oplus m \oplus n & 0000
\end{array}
$$

良形なので，後手必勝である。適当に取って相手がミスをするのを待つしかない。

例 1.2　$(l, m, n) = (12, 9, 3)$

$$
\begin{array}{r|l}
l & 1100 \\
m & 1001 \\
n & 0011 \\
\hline
l \oplus m \oplus n & 0110
\end{array}
$$

$l \oplus m \oplus n$ の最も左にある 1 を 0 に変えるためには，l を減らさなければならない。

$$
\begin{array}{r|l}
l \oplus m \oplus n & 0110 \\
l & 1100 \\
\hline
l' & 1010
\end{array}
$$

$(l', m, n) = (10, 9, 2)$ にすればよい。

例 1.3　$(l, m, n) = (12, 13, 6)$

$$
\begin{array}{r|l}
l & 1100 \\
m & 1101 \\
n & 0110 \\
\hline
l \oplus m \oplus n & 0111
\end{array}
$$

l, m, n のどれを減らしてもできる。

$$
\begin{array}{r|l}
l \oplus m \oplus n & 0111 \\
l & 1100 \\
\hline
l' & 1011
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
l \oplus m \oplus n & 0111 \\
m & 1101 \\
\hline
m' & 1010
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
l \oplus m \oplus n & 0111 \\
n & 0110 \\
\hline
n' & 0001
\end{array}
$$

$(l', m, n) = (11, 13, 6)$ または $(l, m', n) = (12, 10, 6)$ または $(l, m, n') = (12, 13, 1)$ にすればよい。

1.5 ミゼール版

“最後に石を取ったプレイヤーを負けとする” とルール変更したゲームを**ミゼール版**という。

必勝法

- 2 個以上石が残っている山が二山以上ある間は，正規版もミゼール版も $l \oplus m \oplus n = 0$ を満たす (l, m, n) を残すように取っていく。
- 2 個以上残っている山が一山以下になったとき，つぎのように取る（取れなければ負け）。

		正規版		ミゼール版
$(1,1,n)$	$\to$	$(1,1,0)$	$\to$	$(1,1,1)$
$(1,0,n)$	$\to$	$(1,0,1)$	$\to$	$(1,0,0)$
$(0,0,n)$	$\to$	$(0,0,0)$	$\to$	$(0,0,1)$

1.6 解答

問題 1.1

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	0	3	2	5	4	7	6	9	8	11	10	13	12	15	14
2	2	3	0	1	6	7	4	5	10	11	8	9	14	15	12	13
3	3	2	1	0	7	6	5	4	11	10	9	8	15	14	13	12
4	4	5	6	7	0	1	2	3	12	13	14	15	8	9	10	11
5	5	4	7	6	1	0	3	2	13	12	15	14	9	8	11	10
6	6	7	4	5	2	3	0	1	14	15	12	13	10	11	8	9
7	7	6	5	4	3	2	1	0	15	14	13	12	11	10	9	8
8	8	9	10	11	12	13	14	15	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	8	11	10	13	12	15	14	1	0	3	2	5	4	7	6
10	10	11	8	9	14	15	12	13	2	3	0	1	6	7	4	5
11	11	10	9	8	15	14	13	12	3	2	1	0	7	6	5	4
12	12	13	14	15	8	9	10	11	4	5	6	7	0	1	2	3
13	13	12	15	14	9	8	11	10	5	4	7	6	1	0	3	2
14	14	15	12	13	10	11	8	9	6	7	4	5	2	3	0	1
15	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0